Решение заданий теоретического тура

Задача 1.

a) Чему равны максимальная и минимальная высоты над горизонтом звезды α Uma в Минске? Склонение Дубхе составляет $+61°39'32{,}0''$, а прямое восхождение $11^h04^m45{,}04^s$.

b) Найдите максимальное и минимальное значения южного азимута для этой звезды в Минске.

Решение:

В Минске Дубхе кульминирует к северу от зенита, потому что $\delta > \varphi$.

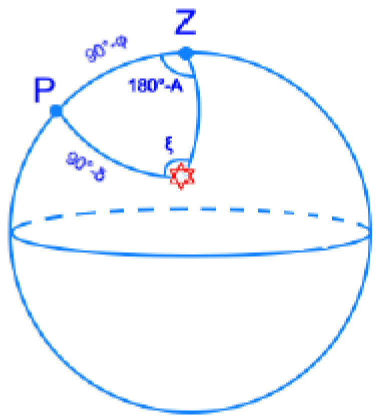
a) Высота в верхней кульминации:

$h_{max} = 90° - \delta + \varphi = 82°14'16''$.

Высота в нижней кульминации:

$h_{min} = -90° + \delta + \varphi = 25°33'20''$.

b) Поскольку верхняя и нижняя кульминация Дубхе в Минске происходят по одну сторону от зенита, то экстремальные значения ее азимута определяются условием перпендикулярности ее круга склонений и вертикала $\xi = 90°$.



Рассмотрев соответствующий сферический треугольник, запишем:

$$\frac{\sin(180° - A)}{\sin(90° - \delta)} = \frac{\sin\zeta}{\sin(90° - \varphi)} \Rightarrow \frac{\sin A}{\cos\delta} = \frac{\sin\zeta}{\cos\varphi} \Rightarrow \sin A = \sin\xi\frac{\cos\delta}{\cos\varphi}.$$

Подставив численные значения, получим:

$$A_{min} = 180° - \arcsin(\sin 90° \cdot \frac{\cos 61°39'32''}{\cos 53°53'48''}) = 126°19'40''.$$

$A_{max} = 360° - A_{min} = 233°40'20''$

Мы учли, что рассматриваемые точки находятся в северной части небесной сферы.

Ответ: $h_{max} = 90° - \delta + \varphi = 82°14'16''$, $h_{min} = -90° + \delta + \varphi = 25°33'20''$, $A_{min} = 126°19'40''$, $A_{max} = 233°40'20''$.

Задача 2

Каждый год ночное небо удивляет астрономов кометами – как известными периодическими (не пропустите комету Галлея в 2061 году!?), так и открытыми впервые. Однако много ли кто задумывался о том, что эти кометы могут быть из другой звездной системы? В данной задаче Вы сможете оценить примерную вероятность этого необычного явления (можно ли будет распознать внесолнечную природу такой кометы – это уже другой вопрос). Считайте, что средняя концентрация звезд в окрестностях Солнца $n_{ST} \approx 0{,}14\,пк^{-3}$. Считайте также, что во время формирования звезд большое количество комет в результате гравитационного взаимодействия с протопланетами будет катапультировано прямо в Млечный Путь. Общая масса этих комет составляет примерно 1 массу Земли, а каждая комета имеет радиус $R \approx 1км$ и плотность $\rho \approx 1 г \cdot см^{-3}$. В первом приближении дисперсия скоростей комет равна таковой для звезд по соседству с Солнцем: $\Delta v \approx 10\,км \cdot с^{-1}$. Гравитационным притяжением Солнца Вы можете пренебречь.

Исходя из этих данных, определите вероятность, с которой в столетие «экзокомета» приблизится к Солнцу на расстояние орбиты Юпитера (R_J) - настолько близко, что комета начнет испаряться и можно будет наблюдать ее хвост.

Решение:

Количество «столкновений» комет с орбитой Юпитера:

$N = nV$,

где V - объем цилиндра «описанного» орбитой Юпитера, движущейся относительно комет (любое движение относительно) со скоростью Δv, за $100\,лет$, а n - концентрация комет:

$V = \pi R_J^2 \Delta v\, t$.

Концентрация комет:

$$n = n_{ST} \frac{M_Z}{M_{COMET}} = n_{ST} \frac{3M_Z}{4\pi\rho R^3}.$$

В итоге получим (не забудьте перевести все величины в СИ):

$$N = \pi R_J^2 \Delta v\, t \cdot n_{ST} \frac{3M_Z}{4\pi\rho R^3} = 0{,}41.$$

Таким образом, вероятность увидеть экзосолнечную комету за столетие 41%, что не так уж и мало. Следует при этом иметь ввиду, что эта оценка получена в результате очень больших приближений.

Ответ: 41%.

Задача 3

Карликовая планета движется вокруг Солнца так, что максимальное расстояние до него вдвое больше минимального, при этом ее период обращения составляет 3 года. Чему равна наибольшая угловая скорость планеты в противостоянии для земного наблюдателя? Орбиту Земли считайте круговой.

Решение:

Определим большую полуось орбиты карликовой планеты из третьего закона Кеплера:

$$a = T^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} = 2{,}080\, а.е.$$

Найдем расстояния в афелии Q и перигелии q из условий:

$$\left.\begin{aligned} Q + q &= 2a \\ \frac{Q}{q} &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q = \frac{2}{3}a = 2{,}733\, а.е.\,,\ \ q = \frac{1}{3}a = 1{,}387\, а.е.$$

Рассчитаем линейную скорость планеты в афелии и перигелии:

$$v_q = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{2\pi a}{T} = 6{,}161\frac{а.е.}{год}$$

$$v_Q = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\frac{2\pi a}{T} = 3{,}081\frac{а.е.}{год}$$

В противостоянии движение планеты попятное, поэтому угловую скорость ее относительно земного наблюдателя находим по формулам:

$$\omega_Q = \frac{v_z - v_Q}{Q-1} = \frac{6{,}283 - 3{,}081}{2{,}773 - 1} = 1{,}806\, год^{-1} = 4{,}944 \cdot 10^{-3}\, сут^{-1} = 5{,}722 \cdot 10^{-8}\, c^{-1}$$

$$\omega_q = \frac{v_z - v_q}{q-1} = \frac{6{,}283 - 6{,}6161}{1{,}387 - 1} = 0{,}316\, год^{-1} = 8{,}647 \cdot 10^{-4}\, сут^{-1} = 1{,}001 \cdot 10^{-8}\, c^{-1}$$

Таким образом, угловая скорость движения планеты в противостоянии относительно земного наблюдателя максимальна при нахождении ее в афелии своей орбиты.

Ответ: $\omega_{max} = 1{,}806\, год^{-1} = 4{,}944 \cdot 10^{-3}\, сут^{-1} = 5{,}722 \cdot 10^{-8}\, c^{-1}$.

Задача 4

Если максимальные значения температуры поверхности цефеиды и ее радиуса больше минимальных на 20% и 10% соответственно, то чему равна разность ее максимальной и минимальной абсолютной звездной величины?

Решение:

Обозначим T_1, R_1 - абсолютные температуры поверхности и радиус цефеиды при максимальном сжатии, T_2, R_2 - абсолютные температуры поверхности и радиус цефеиды при максимальном расширении.

Тогда: $T_1 = 1{,}2T_2$, $R_2 = 1{,}1R_1$.

Отношение светимостей цефеиды:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{R_2^2 T_2^4}{R_1^2 T_1^4} = \frac{1{,}1^2}{1{,}2^4} = 0{,}58353$$

Разность абсолютных звездных величин:

$$M_2 - M_1 = -2{,}5 \cdot \lg\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = 0{,}585.$$

Ответ: $M_2 - M_1 = 0{,}585$.

Задача 5

Компьютерное моделирование Солнца и его внутренних слоев дает значения плотности вещества $\rho = 1{,}53 \cdot 10^5\ кг \cdot м^{-3}$ и оптической плотности $\kappa = 0{,}217\ м^2 \cdot кг$ в его центре. *Подсказка:* при решении данной задачи Вам предстоит выяснить физический смысл величины κ.

а) Длина свободного пробега для частицы является путем, который успевает пройти движущаяся частица до столкновения с другой частицей. Выведите формулу средней длины свободного пробега как функцию от концентрации частиц n и площади поперечного сечения частицы σ.

b) Исходя из соответствия размерностей, выведите длину свободного пробега для фотона от ρ и κ. Чему равна эта длина для фотона в центре Солнца?

c) При большом количестве столкновений в их результате частицы меняют направление движения. При этом путь, пройденный частицей за все время столкновений в одном направлении по прямой (иными словами, ее перемещение), равен $d = l\sqrt{N}$, где l - длина свободного пробега, а N - количество столкновений. Считая среднюю длину свободного пробега постоянной, найдите время, необходимое фотону для преодоления пути из центра Солнца к его поверхности.

Решение:

а) Если частица сталкивается с точечными частицами, то объем, описанный частицей за время t, равняется $V = \sigma v t$ при пройденном пути vt. Количество частиц (а значит, столкновений) в объеме $N = n\sigma v t$.

Поэтому $l = \dfrac{vt}{n\sigma v t} = \dfrac{1}{n\sigma}$.

b) Применим метод размерностей $[\rho^\alpha \kappa^\beta] = м$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -3\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{5} \\ \beta = \dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Получим:

$$l = \rho^{-\frac{1}{5}} \kappa^{\frac{1}{5}} = (1{,}53 \cdot 10^5)^{-\frac{1}{5}} \cdot 0{,}217^{\frac{1}{5}} = 0{,}068\, м.$$

c) В данном случае перемещение $d = R_s$. Значит $R_S = l\sqrt{N}$ и $N = \dfrac{R_S^2}{l^2}$.

Путь, пройденный частицей:

$$s = N\,l = \frac{R_S^2}{l}$$

Поскольку фотоны перемещаются от столкновения к столкновению со скоростью света, то:

$$t = \frac{R_S^2}{l\,c} = 2{,}39 \cdot 10^{10}\, с = 2{,}76 \cdot 10^5\, сут = 75{,}7\, лет.$$

Ответ: $l = 0{,}068\, м$, $t = 2{,}39 \cdot 10^{10}\, с = 2{,}76 \cdot 10^5\, сут = 75{,}7\, лет$.

Широта Минска	$53°53'48''$
Долгота Минска	$27°33'56''$
Зимнее солнцестояние 2016	21.12 10:44 UTC-0
Тропический год	365,2422 сут
Наклон плоскости эклиптики к плоскости земного экватора	$23°26'$
Астрономическая единица	$1{,}496 \cdot 10^{11}\,м$
Большая полуось орбиты Юпитера	$5{,}2044\,а.е.$
Радиус Солнца	$6{,}96 \cdot 10^{8}\,м$
Скорость света в вакууме	$299792458\,м/с$

Оценка задач проводится в соответствии с решением жюри.

Решения заданий практического тура

Задание 1

Какие из нижеперечисленных звезд в Вашем городе сегодня будут (если не помешает облачность) a) видны всю ночь; b) видны часть ночи; c) не видны вовсе.

Сириус, Канопус, Арктур, Вега, Капелла, Ригель, Процион, Ахернар, Бетельгейзе, Хадар, Акрукс, Альтаир, Альдебаран, Антарес, Спика, Поллукс, Фомальгаут, Мимоза, Денеб, Кастор.

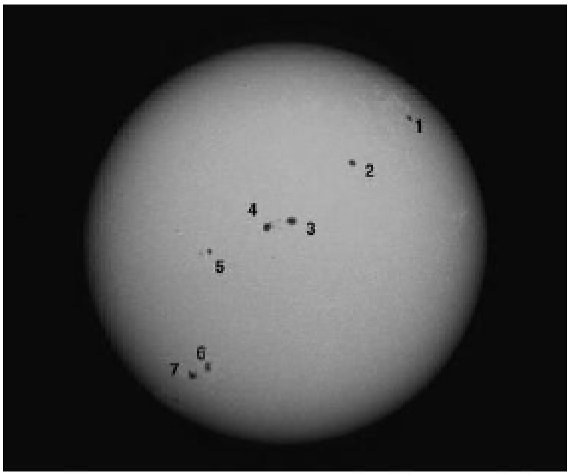
Решение:

Сириус	- часть ночи
Канопус	- не виден вовсе
Арктур	- часть ночи
Вега	- всю ночь
Капелла	- всю ночь
Ригель	- часть ночи
Процион	- часть ночи
Ахернар	- не виден вовсе
Бетельгейзе	- часть ночи
Хадар	- не виден вовсе
Акрукс	- не виден вовсе
Альтаир	- часть ночи
Альдебаран	- часть ночи
Антарес	- часть ночи
Спика	- часть ночи
Поллукс	- всю ночь
Фомальгаут	- часть ночи
Мимоза	- не видна вовсе
Денеб	- всю ночь
Кастор	- всю ночь.

Задание 2

а) Найдите широту и долготу всех пронумерованных солнечных пятен. Считайте, что экватор Солнца расположен горизонтально, а солнечные координаты определены аналогично земным. Долгота отсчитывается от меридиана, проходящего через видимый центр диска.

b) Найдите площадь пятен 3, 4, 6 и 7 в миллионных долях солнечной полусферы (msh).



Решение:

Все расстояния даны в градусах и радиусах Солнца

x – горизонтальная координата пятна

y – вертикальная координата пятна

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - расстояние от пятна до центра солнечного диска

$\lambda = \sin^{-1} x$ - долгота пятна

$\varphi = \sin^{-1} x$ - широта пятна

$\alpha = \sin^{-1} r$ - угловое расстояние от пятна до центра солнечного диска

D - видимый диаметр пятна или его видимые длина и ширина (пятно № 6)

$S = \dfrac{\pi \dfrac{D^2}{4}}{2\pi(\cos\alpha)^2} \cdot 10^6 = \dfrac{D^2}{8(\cos\alpha)^2} \cdot 10^6$ или $S = \dfrac{ab}{2\pi(\cos\alpha)^2} \cdot 10^6$ - площадь пятна в msh.

№	x	y	r	λ	φ	α	D	S
1	0,600	0,600		37°	37°			
2	0,327	0,400		22°	24°			
3	0,182	0,109	0,212	10°	6°	12,24°	0,055	396
4	-0,109	0,073	0,131	-6°	4°	7,53°	0,036	165
5	-0,318	-0,036		-19°	-2°			
6	-0,400	-0,618	0,736	-24°	-38°	47,42°	0,027x 0,055	516
7	-0,473	-0,473	0,669	-28°	-28°	41,95°	0,045	458

Задание 3

Как известно, в новогоднюю ночь настоящие астрономы не сидят за столом, а идут наблюдать переменные звезды и объекты из каталога Месье. Даже если облачно.

Считайте, что новогодняя ночь начинается сразу после захода центра солнечного диска и заканчивается непосредственно после его восхода.

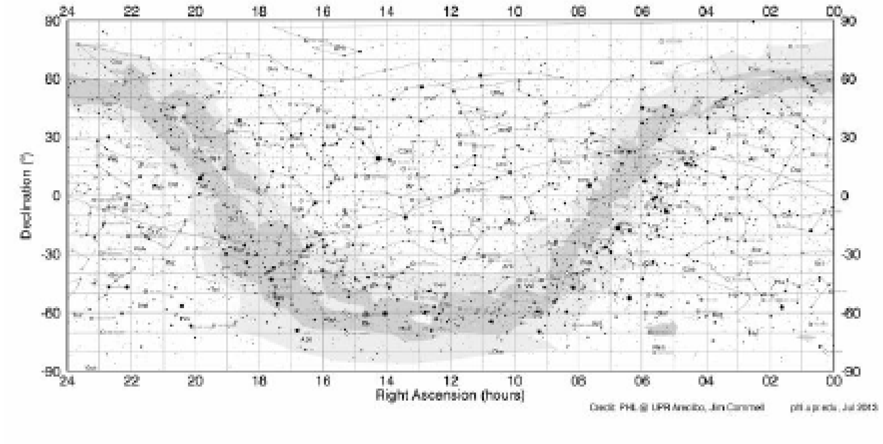
a) Определите время начала и окончания ночи с 31 декабря 2016 на 1 января 2017 года в Минске по времени UTC+3. Рефракцией у горизонта можно пренебречь.

b) На карте звездного неба отметьте положения горизонта начиная с момента начала ночи с интервалом в 1 час. Отметьте также положение горизонта для момента наступления утра.

c) На этой же карте обозначьте область, доступную для наблюдений в новогоднюю ночь.

d) Подпишите находящиеся в этой области 10 объектов Месье с указанием их типа, а также 5 двойных и 5 переменных звезд. Если звезда и двойная и переменная, то она засчитывается в обе категории.

Широта Минска	53°53′48″
Долгота Минска	27°33′56″
Зимнее солнцестояние 2016	21.12 10:44 UTC-0
Тропический год	365,2422 сут
Наклон плоскости эклиптики к плоскости земного экватора	23°26′



Declination (°)
Right Ascension (hours)
Credit: PHL @ UPR Arecibo, Jim Cornmell
phl.upr.edu, Jul 2013

Решение:

a) $T = UTC + n = T_S - \lambda + n = t_S + 12^ч + \eta - \lambda + n$, $\lambda_S = 360^\circ \dfrac{\Delta T}{T_{trop}} + 270^\circ$,

ΔT - количество дней от солнцестояния до Нового года,

$\lambda_S = 280{,}420^\circ$, $\eta = 3^м 24^с$,

$t_S = \pm \cos^{-1}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_S)$ - часовой угол Солнца для захода и восхода.

$\delta_S = \sin^{-1}(\sin\lambda_S \sin\varepsilon) = -23^\circ 15'$

$t_S = \pm 54^\circ 21{,}5' = \pm 3^ч 37^м 26^с$.

$T_1 = 3^ч 37^м 26^с + 12^ч + 3^м 24^с - 27^\circ 33' 56'' + 3^ч = 16^ч 51^м$

$T_2 = -3^ч 37^м 26^с + 12^ч + 3^м 24^с - 27^\circ 33' 56'' + 3^ч = 9^ч 36^м$

b) $t + \alpha = t_S + \alpha_S$

$\alpha = t_S + \alpha_S - t = t_s + \alpha_s$ - прямое восхождение точки зенита в определенный момент времени. Склонение точки зенита всегда равно $53^\circ 53' 48''$.

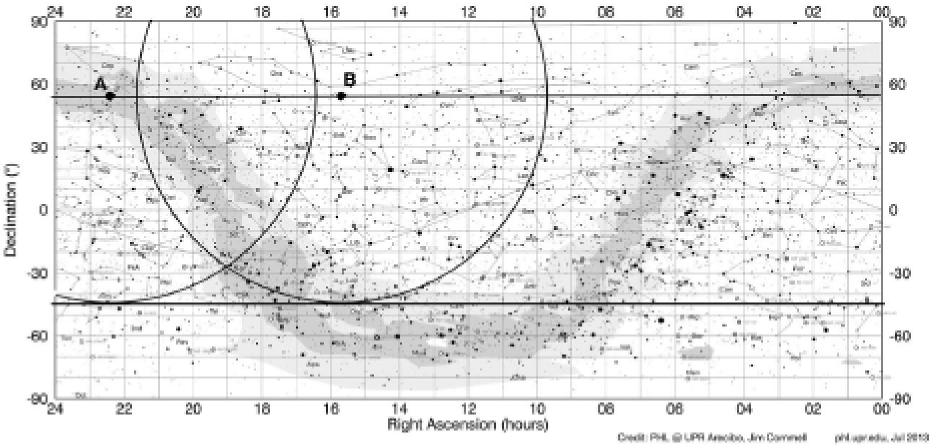
$\alpha_S = \tan^{-1}(\tan\lambda_S \cos\varepsilon) = 18^ч 45^м 20^с$.

T	t_S	$\alpha = t_S + \alpha_S$
$16^ч 51^м$	$3^ч 37^м 26^с$	$22^ч 23^м$
$17^ч 51^м$	$4^ч 37^м 26^с$	$23^ч 23^м$
$18^ч 51^м$	$5^ч 37^м 26^с$	$0^ч 23^м$
$19^ч 51^м$	$6^ч 37^м 26^с$	$1^ч 23^м$
$20^ч 51^м$	$7^ч 37^м 26^с$	$2^ч 23^м$
$21^ч 51^м$	$8^ч 37^м 26^с$	$3^ч 23^м$
$22^ч 51^м$	$9^ч 37^м 26^с$	$4^ч 23^м$
$23^ч 51^м$	$10^ч 37^м 26^с$	$5^ч 23^м$
$0^ч 51^м$	$11^ч 37^м 26^с$	$6^ч 23^м$
$1^ч 51^м$	$12^ч 37^м 26^с$	$7^ч 23^м$
$2^ч 51^м$	$13^ч 37^м 26^с$	$8^ч 23^м$
$3^ч 51^м$	$14^ч 37^м 26^с$	$9^ч 23^м$
$4^ч 51^м$	$15^ч 37^м 26^с$	$10^ч 23^м$
$5^ч 51^м$	$16^ч 37^м 26^с$	$11^ч 23^м$
$6^ч 51^м$	$17^ч 37^м 26^с$	$12^ч 23^м$
$7^ч 51^м$	$18^ч 37^м 26^с$	$13^ч 23^м$
$8^ч 51^м$	$19^ч 37^м 26^с$	$14^ч 23^м$
$9^ч 36^м$	$20^ч 22^м 34^с$	$15^ч 08^м$

c) На карте с ответами показаны лишь часть области, видимая в начале наблюдений (ее центр в точке A), и часть области, видимая в конце наблюдений (точка B). Так как они перекрываются, то видна будет вся область до склонения $\approx -36^\circ$ (жирная линия внизу карты) за исключением маленького треугольника, где две окружности не пересекаются.

d) В этой области расположены все объекты каталога Месье, за исключением M54, M69 и M70, а также множество переменных и двойных звезд.

Принимаются все соответствующие действительности ответы с верным указанием местоположения звезды на карте.



Оценка задач проводится в соответствии с решением жюри.