

Вариант 1

Задания теоретического тура

Задание 1. Характеристики орбиты

Небесное тело массой $m = 9,40 \times 10^{20}$ кг обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите с эксцентриситетом $e = 0,08$. При значении истинной аномалии $\theta = 90^\circ$ его расстояние от Солнца $r = 2,75$ а. е.

Определите по этим данным:

- 1) в каких пределах изменяется расстояние тела от Солнца;
- 2) в каких пределах изменяется модуль линейной скорости тела;
- 3) промежуток времени, за который тело переходит из афелия в точку орбиты, расположенную на среднем гелиоцентрическом расстоянии;
- 4) длину пути, пройденного телом при перемещении между точками, указанными в пункте 3);
- 5) название небесного объекта по характеристикам его орбиты.

Задание 2. Планета и астероид

В идеальной системе доброй звезды B есть планета Z и большой астероид Φ , обращающиеся по круговым орбитам вокруг звезды в противоположных направлениях. Орбиты планеты и астероида лежат в одной плоскости. Масса звезды $M_Z = \pi \cdot M_\odot$ ($\pi = 3,14$), радиус орбиты планеты $r_Z = \pi$ а. е., радиус орбиты астероида $r_\Phi = 2\pi$ а. е. Массы планеты и астероида малы по сравнению с массой звезды. Планета и астероид обитаемы: на планете живут «зеленые» человечки, на астероиде – «фиолетовые». И те и другие знают и любят астрономию.

Необходимо:

- 1) вывести формулу для синодического периода планеты;
- 2) вывести формулу для синодического периода астероида;
- 3) рассчитать синодические периоды планеты и астероида в земных годах;
- 4) рассчитать синодические периоды планеты и астероида в «зелёных» годах;
- 5) рассчитать синодические периоды планеты и астероида в «фиолетовых» годах.

Задание 3. Космические лучи

Во время вспышек сверхновых образуются космические лучи – потоки заряженных частиц высоких энергий. Среди них есть α -частицы (ядра атомов гелия ${}^4_2\text{He}$) с массой покоя $m_0 = 6,645 \times 10^{-27}$ кг. Пусть полная энергия такой α -частицы равна $E = 4$ ГэВ.

Определите по этим данным:

- 1) релятивистскую массу α -частицы и отношение релятивистской массы к массе покоя;
- 2) скорость и импульс α -частицы;
- 3) кинетическую энергию α -частицы;
- 4) длину волны де Бройля α -частицы;
- 5) длину волны и частоту аннигиляционных фотонов, образующихся при столкновении α -частицы с $\tilde{\alpha}$ -античастицей такой же энергии.

Примечания: скорость света в вакууме $c = 2,998 \times 10^8$ м/с; постоянная Планка $h = 6,626 \times 10^{-34}$ Дж·с; элементарный заряд $e = 1,602 \times 10^{-19}$ Кл; система отсчёта связана с земной лабораторией.

Задание 4. Реликтовое излучение

Спустя примерно 400 тыс. лет после Большого Взрыва Вселенная была заполнена горячей (около 3 000 К) плазмой из частиц вещества (электронов, протонов, нейтронов, некоторых других частиц) и фотонов, которые непрерывно поглощались частицами вещества и снова переизлучались. Такое состояние Вселенной описывается на основе модели абсолютно чёрного тела (АЧТ) – объекта, поглощающего всё падающее на него излучение. АЧТ при этом испускает излучение, которое принято называть тепловым, а спектр АЧТ определяется только его температурой.

Распределение интенсивности в спектре испускания АЧТ подчиняется закону Планка:

$$\rho_{\lambda}(\lambda, T) \Delta\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \Delta\lambda,$$

определяющем спектральную плотность энергии АЧТ $\rho_{\lambda}(\lambda, T)$ в интервале длин волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$. Аналогичное выражение для распределения интенсивности в спектре АЧТ по частотам $\rho_{\nu}(\nu, T)$ может быть получено при условии, что количества световой энергии, приходящиеся на интервалы длин волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$ и частот от ν до $\nu + \Delta\nu$, одинаковы.

В процессе дальнейшей эволюции Вселенная продолжала остывать, в результате чего электроны объединились с протонами в атомы водорода, и вещество перестало поглощать излучение, которое в момент его «отделения» от вещества находилось в состоянии теплового равновесия с веществом, а спектр излучения соответствовал спектру АЧТ. Это реликтовое излучение (РИ) сохранилось до современной эпохи и несёт в себе информацию о состоянии ранней Вселенной. Однако вследствие расширения и остывания Вселенной современные характеристики РИ отличаются от его исходных характеристик.

При измерении спектра РИ в шкале длин волн установлено, что распределение интенсивности в спектре РИ (форма спектра) по-прежнему соответствует излучению АЧТ, а максимум спектральной плотности излучения находится на длине волны $\lambda_{\text{max}} = 1,063$ мм.

Определите по этим данным:

- 1) современную температуру РИ;
- 2) длину волны максимума в спектре РИ в момент его «отделения» от вещества;
- 3) в каком спектральном диапазоне находился спектр РИ в момент его «отделения» от вещества;
- 4) частоту максимума спектра РИ ν_{max} , если измерения спектра проводить не в шкале длин волн, а в шкале частот.

Примечания: постоянная Вина $b = 2,898 \times 10^{-3}$ м·К; постоянная Планка $h = 6,626 \times 10^{-34}$ Дж·с; постоянная Больцмана $k = 1,381 \times 10^{-23}$ Дж/К; используйте графический метод решения уравнений.

Задание 5. Пульсар.

Одними из источников вспышек сверхновых типа II являются звёзды главной последовательности спектрального класса В. Средняя скорость вращения таких звёзд $\nu_B = 200$ км/с, индукция магнитного поля вблизи её магнитных полюсов $B = 2,0 \times 10^4$ Тл. После сброса оболочки в результате вспышки сверхновой радиус звезды уменьшается примерно в 100 раз, при этом взрыв уносит до 99,99% момента импульса звезды. Если масса оставшегося ядра звезды не превысит $3M_\odot$, то ядро далее эволюционирует в нейтронную звезду – чрезвычайно плотный и быстро вращающийся объект с очень сильным магнитным полем.

Заряженные частицы вещества (электроны), попадающие в магнитное поле нейтронной звезды вблизи её магнитных полюсов, ускоряются, в результате чего испускают нетепловое электромагнитное излучение, которое в случае нерелятивистских электронов называется циклотронным, а в случае релятивистских – синхротронным (СИ).

Такое излучение сосредоточено в узком конусе в направлении мгновенной скорости электрона ν , а максимум интенсивности излучения приходится на частоту $\nu_s = \nu_c \gamma^3$, где ν_c – циклотронная частота, а $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}$. Если ось магнитного диполя нейтронной звезды не

совпадает с осью её вращения, то конус СИ вращается в пространстве с периодом вращения нейтронной звезды. Периодическое прохождение через наблюдателя узконаправленного конуса СИ формирует так называемый пульсарный эффект, наблюдаемый у многих нейтронных звёзд.

У некоторой нейтронной звезды максимум интенсивности её пульсарного эффекта приходится на фотоны с энергиями 6 кэВ.

Определите по этим данным:

- 1) среднюю плотность нейтронной звезды;
- 2) период вращения нейтронной звезды;
- 3) индукцию магнитного поля вблизи магнитных полюсов нейтронной звезды;
- 4) скорость электронов (в единицах скорости света) вблизи магнитного полюса нейтронной звезды;
- 5) к какому классу пульсаров относится данная нейтронная звезда (радиопульсар, оптический, рентгеновский или гамма-пульсар).

Примечания: масса Солнца $m_\odot = 1,988 \times 10^{30}$ кг; радиус Солнца $R_\odot = 700\,000$ км; радиус звезды спектрального класса В $R_B = 4R_\odot$; масса звезды спектрального класса В $m_B = 5m_\odot$; заряд электрона $e = 1,602 \times 10^{-19}$ Кл; масса электрона $m = 9,109 \times 10^{-31}$ кг; постоянная Планка $h = 6,626 \times 10^{-34}$ Дж·с; магнитное поле следует считать однородным.

Вариант 1

Решения заданий теоретического тура

Задание 1. Характеристики орбиты (20 баллов)

Решение

1) Для определения диапазона изменения расстояния от небесного тела до Солнца помимо эксцентриситета e необходимо знать длину большой полуоси эллипса орбиты a , которую можно определить, используя зависимость расстояния от истинной аномалии

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

поэтому при $\theta = 90^\circ$ получим

$$a = \frac{r}{1-e^2} = 2,77 \text{ а.е.}$$

Если не использовать известную зависимость $r(\theta)$, то в данном случае a можно получить, исходя из несложных геометрических соображений, введя полуфокальное расстояние c

$$r^2 + 4c^2 = (2a - r)^2.$$

Значение длины большой полуоси оказывается таким же.

Теперь найдем перигелийное q и афелийное Q расстояния, тем самым определяя диапазон изменения r :

$$q = a \cdot (1 - e) = 2,55 \text{ а.е.}, \quad Q = a \cdot (1 + e) = 2,99 \text{ а.е.}$$

2) Для определения диапазона изменения модуля линейной скорости V в начале найдем период обращения T , круговую скорость V_{KP} , а затем перигелийную V_P и афелийную V_A скорости:

$$T = a^{3/2} = 4,61 \text{ года}, \quad V_{KP} = 2\pi a/T = 17,89 \text{ км/с},$$
$$V_P = V_{KP} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 19,38 \text{ км/с}, \quad V_A = V_{KP} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 16,51 \text{ км/с}.$$

3) Чтобы найти искомый промежуток времени Δt , необходимо знать площадь ΔS эллиптического сектора, описанную радиус-вектором тела в указанном случае, и его секторную (или *секторальную*) скорость v , которая остается постоянной согласно второму закону Кеплера. Они определяются из геометрических соображений (b – малая полуось):

$$\Delta S = \frac{\pi ab}{4} + \frac{bc}{2} = a^2 \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{e}{2} \right); \quad v = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T}.$$

Тогда промежуток времени

$$\Delta t = \Delta S/v = \left(\frac{1}{4} + \frac{e}{2\pi} \right) \cdot T = 1,21 \text{ года} = 442,40 \text{ суток}.$$

4) Длина пройденного телом пути L равна четверти длины эллипса орбиты, поэтому:

$$L = \pi(a + b)/4 = \pi a(1 + \sqrt{1 - e^2})/4 = 4,34 \text{ а. е.} \approx 65 \cdot 10^7 \text{ км}.$$

5) Небесное тело с такими характеристиками орбитального движения и указанной массой – это карликовая планета Церера из пояса астероидов.

Ответы:

- 1) $r \in [2,55 \text{ а. е.}; 2,99 \text{ а. е.}]$ (6 баллов);
- 2) $V \in [16,51 \text{ км/с}; 19,38 \text{ км/с}]$ (4 балла);
- 3) $\Delta t = 1,21 \text{ года} = 442,40 \text{ суток}$ (7 баллов);
- 4) $L = 4,34 \text{ а. е.} \approx 65 \cdot 10^7 \text{ км}$ (2 балла);
- 5) Карликовая планета из пояса астероидов Церера (1 балл).

Задание 2. Планета и астероид (20 баллов)

Решение

1) Для вывода формулы синодического периода нижней планеты S_3 надо понимать, что относительная угловая скорость при противоположном направлении обращения вокруг звезды равна сумме угловых скоростей планеты и астероида

$$\omega_{\text{отн}} = \omega_3 + \omega_\phi; \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi}{S_3} = \frac{2\pi}{T_3} + \frac{2\pi}{T_\phi}; \quad \rightarrow \quad \frac{1}{S_3} = \frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_\phi}; \quad \rightarrow \quad S_3 = \frac{T_3 T_\phi}{T_3 + T_\phi}.$$

2) В случае S_ϕ работает та же сумма угловых скоростей, поэтому и формула получается та же

$$S_\phi = \frac{T_3 T_\phi}{T_3 + T_\phi}.$$

То есть в рассматриваемой ситуации синодические периоды верхних и нижних объектов рассчитываются по одной формуле и будут одинаковыми!!!

3) Рассчитаем синодические периоды в земных годах, используя 3-й закон Кеплера и полученную формулу:

$$r^3 \equiv a^3 = \pi T^2; \quad \rightarrow \quad T_3 = \pi \text{ лет}; \quad T_\phi = 2\sqrt{2}\pi \text{ лет}; \quad \rightarrow \quad S_3 = S_\phi = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}\pi \text{ лет} = 2,320 \text{ года}.$$

4) Рассчитаем синодические периоды в «зелёных» годах, используя 3-й закон Кеплера и полученную формулу, считая, что 1 зел.а.е. = π а.е.:

$$r^3 \equiv a^3 = T^2; \quad \rightarrow \quad T_3 = 1 \text{ зел. год}; \quad T_\phi = 2\sqrt{2} \text{ зел. лет}; \quad \rightarrow$$

$$S_3 = S_\phi = \frac{8-2\sqrt{2}}{7} \text{ зел. лет} = 0,739 \text{ зел. года}.$$

5) Рассчитаем синодические периоды в «фиолетовых» годах, используя 3-й закон Кеплера и полученную формулу, считая, что 1 фиол. а.е. = 2π а.е.:

$$r^3 \equiv a^3 = T^2; \quad \rightarrow \quad T_3 = 0,354 \text{ фиол. года}; \quad T_\phi = 1 \text{ фиол. год}; \quad \rightarrow \quad S_3 = S_\phi = 0,261 \text{ фиол. года}.$$

Ответы:

1) и 2) $S_3 = S_\phi = \frac{T_3 T_\phi}{T_3 + T_\phi}$ (5 баллов, 2 балла);

3) $S_3 = S_\phi = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}\pi \text{ лет} = 2,320 \text{ года}$ (5 баллов);

4) $S_3 = S_\phi = \frac{8-2\sqrt{2}}{7} \text{ зел. лет} = 0,739 \text{ зел. года}$ (4 балла);

5) $S_3 = S_\phi = 0,261 \text{ фиол. года}$ (4 балла).

Задание 3. Космические лучи (20 баллов).

Решение

1) В системе СИ полная энергия α -частицы $E = 4 \text{ ГэВ} = 6,408 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$. Найдем релятивистскую массу m и её отношение к массе покоя m_0 :

$$m = E/c^2 = 7,120 \cdot 10^{-27} \text{ кг}; \quad m/m_0 = 1,071.$$

2) Рассчитаем скорость V и импульс P :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad \rightarrow V = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = 0,358c = 1,074 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$P = mV = 7,648 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м/с};$$

3) Определим кинетическую энергию α -частицы:

$$E_k = E - m_0 c^2 = 0,428 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 0,267 \text{ ГэВ}.$$

4) Корпускулярно-волновой дуализм говорит о том, что частицы материи обладают волновыми свойствами. Соответствующая длина волны называется длиной волны де Бройля, которая рассчитывается по формуле:

$$\lambda_{\text{дБ}} = h/P = 8,664 \cdot 10^{-16} \text{ м};$$

5) Реакция аннигиляции в данном случае имеет вид: $\alpha + \tilde{\alpha} \rightarrow 2\gamma$. При оговоренных условиях частица и её античастица рождают два одинаковых гамма-кванта, поэтому:

$$E = h\nu = hc/\lambda; \quad \rightarrow \nu = E/h = 9,671 \cdot 10^{23} \text{ Гц}; \quad \lambda = c/\nu = 3,102 \cdot 10^{-16} \text{ м}.$$

Ответы:

- 1) $m = E/c^2 = 7,130 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ и $m/m_0 = 1,073$ (3 балла и 1 балл);
- 2) $V = 1,087 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ и $P = mV = 7,750 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ (4 балла, 1 балл);
- 3) $E_k = 0,435 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 0,272 \text{ ГэВ}$ (3 балла);
- 4) $\lambda_{\text{дБ}} = h/P = 8,550 \cdot 10^{-16} \text{ м}$ (4 балла);
- 5) $\nu = E/h = 9,671 \cdot 10^{23} \text{ Гц}; \quad \lambda = c/\nu = 3,100 \cdot 10^{-16} \text{ м}$ (2 балла и 2 балла).

Задание 4. Реликтовое излучение (20 баллов).

Решение

1), 2) и 3) Температура РИ и λ_{max} связаны законом смещения Вина:

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T},$$

откуда в современную эпоху $T = 2,726 \text{ К}$, а в момент «отделения» излучения от вещества $\lambda_{\text{max}} \approx 1000 \text{ нм}$, т.е. максимум спектра находился в ИК диапазоне.

4) Положение максимума в спектре излучения АЧТ определяется его температурой, поэтому расчёт с использованием формулы $\nu = c/\lambda$ приведёт к неверному результату (282 ГГц).

Закон Планка в шкале длин волн выглядит следующим образом:

$$\rho_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (1)$$

а в шкале частот:

$$\rho_{\nu}(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (2)$$

Распределения (1) и (2) связаны условием

$$\rho_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \rho_{\nu}(\nu, T) d\nu.$$

Максимум интенсивности в спектре может быть найден при нахождении экстремума функции (2):

$$\frac{d\rho_{\nu}}{d\nu} = 0,$$

откуда следует условие:

$$\frac{h\nu}{kT} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = 3. \quad (3)$$

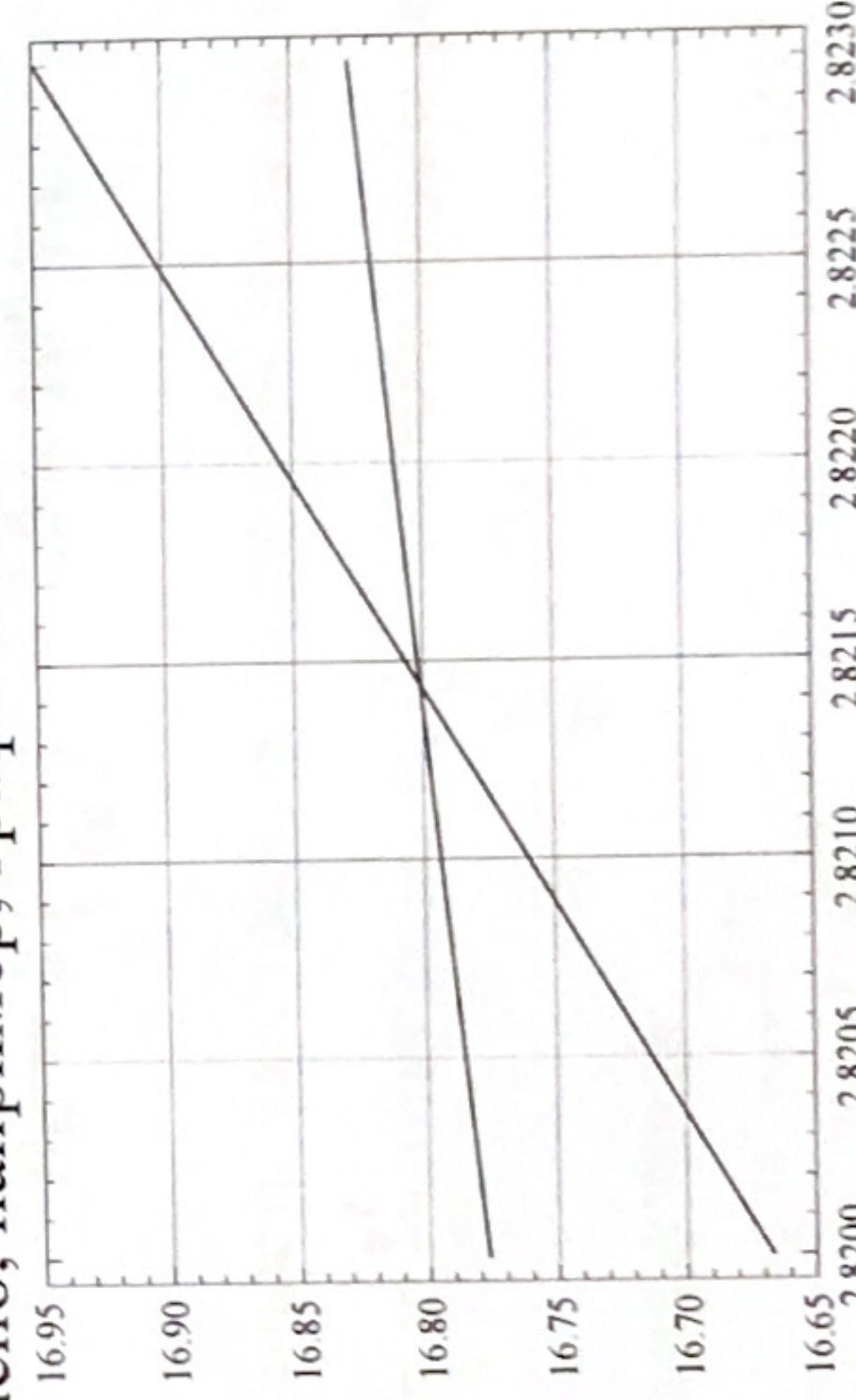
Если ввести замену $\frac{h\nu}{kT} = x$, то условие (3) принимает вид:

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 3,$$

из которого можно получить уравнение:

$$e^x = \frac{3}{3-x},$$

которое может быть решено, например, графически:



$$x = 2,8214.$$

$$\text{Тогда } \nu_{\text{max}} = \frac{x k T}{h} = 160,3 \text{ ГГц.}$$

Ответы:

- 1) $T = 2,726 \text{ К}$ (3 балла);
- 2) $\lambda_{\text{max}} \approx 1000 \text{ нм}$ (3 балла);
- 3) ИК диапазон (2 балла);
- 4) $\nu_{\text{max}} = 2,821 \frac{kT}{h} = 160,3 \text{ ГГц}$ (12 баллов).

Задание 5. Пульсар (20 баллов).

Решение.

1) Средний радиус нейтронной звезды $R_N = 15$ км. Тогда средняя плотность

$$\rho_N = \frac{M_N}{V_N} = \frac{3M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_N^3} = \frac{9M_\odot}{4\pi R_N^3} = 4,2 \times 10^{17} \text{ кг/м}^3.$$

2) Закон сохранения момента импульса для ядра звезды до сжатия в нейтронную звезду и после:

$$I\omega = I_N\omega_N, \quad (1)$$

где I , I_N , ω и ω_N – моменты инерции и угловые скорости ядра до сжатия и после.

Момент импульса ядра звезды $J = I\omega$ до сжатия в нейтронную звезду составляет $x = 0,0001$ от исходного момента импульса звезды

$$J = xJ_B = xI_B\omega_B, \quad (2)$$

где I_B и ω_B – момент инерции и угловая скорость звезды до сброса оболочки.

Угловая скорость $\omega_B = \frac{v_B}{R_B} = \frac{v_B}{4R_\odot}$. Момент инерции шара пропорционален его массе и радиусу (в квадрате)

$$I = \frac{2}{5}mr^2.$$

Тогда из (1) и (2) следует, что

$$xM_B R_B^2 \frac{v_B}{R_B} = M_N R_N^2 \omega_N.$$

Тогда

$$\omega_N = x \frac{M_B R_B}{M_N R_N^2} v_B = x \frac{5M_\odot}{3M_\odot} \frac{4R_\odot}{R_N^2} v_B = 415 \text{ об/с},$$

а период вращения нейтронной звезды $T_N = \frac{2\pi}{\omega_N} = 0,015 \text{ с}.$

3) Индукцию магнитного поля вблизи магнитных полюсов нейтронной звезды B_N можно найти из закона сохранения магнитного потока:

$$BS_B = B_N S_N,$$

где S_B и S_N – площади поверхности звезды до сброса оболочки и нейтронной звезды, соответственно. Тогда

$$B_N = B \left(\frac{4R_\odot}{R_N} \right)^2 = 7,0 \times 10^6 \text{ Тл}.$$

4) и 5) Угловая скорость электрона в магнитном поле $\omega_c = \frac{v}{r}$ находится из второго закона Ньютона: $evB_N = m \frac{v^2}{r}$, откуда $\omega_c = \frac{eB_N}{m}$. Частота циклотронного излучения

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{eB_N}{2\pi m},$$

частота синхротронного излучения:

$$\nu_s = \frac{eB_N}{2\pi m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}}. \quad (3)$$

Энергии фотона 6 кэВ соответствует частота около $15 \times 10^{17} \text{ Гц}$ (рентгеновский диапазон). После преобразований из (3) получаем

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{eB_N}{2\pi\nu_s m} \right)^2}} = 0,86.$$