Решения теоретического тура

1. **(4 балла)** а) Условием наступления полярной ночи является отрицательная высота Солнца в верхней кульминации. Из условия $90° - \varphi + \delta < 0$ получаем $\delta_{\odot} < \varphi - 90° \;\; \Rightarrow \;\; \delta_{\odot} < -20°21'$. Подставим это граничное значение склонения в уравнение

$$\sin\delta_{\odot} = \sin\varepsilon\, sin\left(\frac{360°}{365^d}t\right),$$

откуда, округлив, получим два корня: $t_1 = -62^d$, $t_2 = 244^d$, что соответствует датам 18 января и 20 ноября, соответственно. Значит, с 20 ноября по 18 января в Тромсё будет полярная ночь. Фомула, правда, дает только приближенные результаты, реальные ответы могут отличаться на два-три дня, поэтому ошибка такой величины в ответе засчитывается как правильное решение.

б) Решение будет аналогичным, только на этот раз высота в нижней кульминации должна быть положительной. Из условия $\varphi + \delta - 90° > 0$ получаем $\delta_{\odot} > 20°21'$ и интервал дат с 22 мая по 20 июля.

в) Для того, чтобы наблюдались белые ночи, должно выполняться условие $h_{\text{НК}} > -6°$, но при этом из полученного интервала дат следует исключить полярные дни. Для $h_{\text{НК}} > -6°$ тем же способом получаем $\delta_{\odot} > 14°21'$ и крайние даты 29 апреля и 11 августа. Исключая полярные дни, получаем окончательно, что белые ночи в Тромсё можно наблюдать с 29 апреля по 22 мая и с 20 июля по 11 августа.

2. **(4 балла)** Причина такого расхождения проста – часы туриста шли по местному поясному времени, а солнечные часы показывают истинное солнечное время. Переход от истинного к поясному времени дается формулой

$$T_n = T_{\odot} + \eta - \lambda + n.$$

Судя по графику уравнения времени, на 1 ноября $\eta = -11^m$. Тогда сразу можно выразить долготу места наблюдения:

$$\lambda = T_{\odot} - T_n + \eta + n = 14^h15^m - 14^h00^m - 0^h11^m + 1^h00^m = 1^h04^m = 16°.$$

Теперь, зная долготу, можно легко вычислить показания солнечных часов на 1 июля, где уравнение времени составит уже +4 минуты:

$$T_{\odot} = T_n + \lambda - \eta - n = 14^h00^m + 1^h04^m - 0^h4^m - 1^h00^m = 14^h00^m.$$

Т.е. 1 июля показания наручных и солнечных часов действительно совпадут.

3. **(4 балла)** Поскольку комета движется по практически параболической орбите, то ее гелиоцентрическую скорость возле Марса можно рассчитать по формуле

$$v_{\text{к}} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{a_M}} = 34.1\,\frac{\text{км}}{\text{с}},$$

где a_M – большая полуось орбиты Марса (для оценки орбиту Красной планеты можно считать круговой).

Гелиоцентрическая скорость самого Марса будет равна

$$v_{\text{М}} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_M}} = 24.1\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Нам ничего не известно об ориентации скорости кометы по отношению к скорости Марса. Но очевидно, что скорость кометы относительно Марса по модулю будет заключена в пределах от $v_{\text{к}} - v_{\text{М}} = 10\ \text{км/с}$ до $v_{\text{к}} + v_{\text{М}} = 58.2\ \text{км/с}$. На расстоянии $r = 140\,000$ км от Марса вторая космическая скорость составит

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{М}}}{r}} = 782\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Как видим, скорость кометы при любых ориентациях вектора будет значительно превышать вторую космическую по отношению к Марсу (кроме того, эту скорость поле тяготения Марса еще немного увеличит). Следовательно, комета никак не может стать спутником. Сама же новость бурно обсуждалась в СМИ, так как по космическим меркам 140 тыс. км – это действительно очень мало.

Добавим также, что захват комет планетами Солнечной системы все же теоретически возможен. К примеру, в конце XX века (точный год неизвестен) Юпитер захватил на орбиту комету D/1993 F2 (Шумейкеров — Леви), которая в 1994 году столкнулась с этой планетой.

4. **(4 балла)** Определим сначала скорость спутника в перигее. Воспользуемся для этого формулой

$$v_{\text{п}}^2 = GM_3\left(\frac{2}{R_3 + h_{\text{п}}} - \frac{1}{a}\right),$$

откуда $v_{\text{п}} = 10.5$ км/с. И как видно из этой формулы, поскольку высота в перигее не меняется, то изменение скорости в перигее будет приводить к изменению только большой полуоси орбиты. Пусть скорость в перигее уменьшается на $\Delta v_{\text{п}}$, а большая полуось уменьшается на Δa. Тогда можно записать:

$$(v_{\text{п}} - \Delta v_{\text{п}})^2 = GM_3\left(\frac{2}{R_3 + h_{\text{п}}} - \frac{1}{a - \Delta a}\right).$$

Вычитая это выражение из предыдущего и пренебрегая квадратом малой величины $\Delta v_{\text{п}}$, получаем:

$$2v_{\text{п}}\Delta v_{\text{п}} = GM_3\frac{\Delta a}{(a - \Delta a)a} \approx GM_3\frac{\Delta a}{a^2}.$$

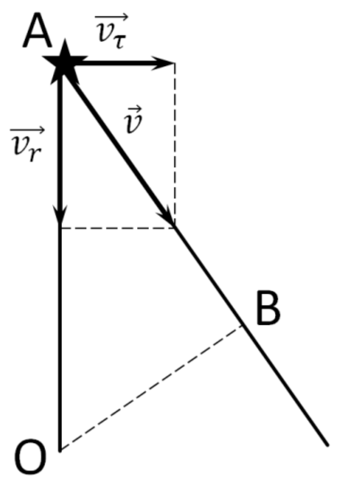
Подставляя значение $\Delta v_{\text{п}} = 1$ м/с, получаем $\Delta a = 132$ км. А поскольку апогейное расстояние равно $r_a = 2a - R_3 - h_{\text{п}}$, то его изменение составит $\Delta r_a = 2\Delta a \approx 260$ км.

Форма же орбиты, очевидно, будет меняться только за счет уменьшения апогейного расстояния. Т.е. эксцентриситет орбиты будет постепенно уменьшаться. Правда, до окружности дело все же не дойдет – со временем вблизи перигея спутник будет проходить все больший путь сквозь атмосферу, потеря энергии за счет трения начнет возрастать, и со временем спутник упадет на Землю.

5. **(4 балла)** Определим сначала тангенциальную и пространственную скорости звезды:

$$v_\tau = 4.74\, r\mu = 87.9\ \text{км/с},$$

$$v = \sqrt{v_\tau^2 + v_r^2} = 142\ \text{км/с}.$$



Угол между лучом зрения и пространственной скоростью составит

$$\alpha = \arccos\frac{v_r}{v} = 38.6°.$$

Тогда длина отрезка *AB* (т.е. путь до наибольшего сближения з Землей) будет равна

$$AB = OA \cdot \cos\alpha = OA \cdot \frac{v_r}{v} = 1.43\ \text{пк} = 4.42 \cdot 10^{13}\ \text{км}.$$

Тогда время движения звезды то точки *B* составит

$$t = \frac{AB}{v} = 3.11 \cdot 10^{11}\ c \approx 9900\ \text{лет}.$$

Чтобы определить блеск звезды в точке *B*, определим отрезок *OB*:

$$OB = OA \cdot \sin\alpha = 1.14\ \text{пк}$$

и воспользуемся законом обратных квадратов:

$$\left(\frac{OA}{OB}\right)^2 = 2.512^{\Delta m},$$

откуда $\Delta m = 1.02^m$, т.е. звезда Барнарда достигнет максимального блеска 8.55^m, что явно недостаточно для ее наблюдения невооруженным глазом.

6. **(всего 6 баллов)** Точность результата будет ограничена, в первую очередь, точностью измерения положения Марса: в этом параметре только 2 значащих цифры, тогда как в остальных данных – по 3-4. Поэтому каждый ответ будем округлять до двух значащих цифр, но для расчетов будем использовать неокругленные значения (чтобы избежать накопления ошибки округления).

   a) **(1 балл)** Количество энергии, приходящее от звезды за единицу времени на единицу площади, перпендикулярную направлению падения лучей, составит $L/4\pi a^2$. Поверхность планеты, очевидно, далеко не вся перпендикулярна направлению падения лучей, однако ее можно заменить плоским диском радиусом R – при перпендикулярном падении лучей такой диск перехватит такой же поток энергии, как и шар. Тогда поглощаемый поток излучения будет равен
   $$\frac{L}{4\pi a^2}\cdot\pi R^2=\frac{LR^2}{4a^2}.$$

   b) **(1 балл)** В прошлом пункте мы нашли, сколько энергии падает на планету в единицу времени. Чтобы определить, сколько она рассеивает, нужно умножить этот результат на альбедо: $\frac{LR^2A}{4a^2}$.

   c) **(1 балл)** $\frac{LR^2(1-A)}{4a^2}$.

   d) **(1 балла)** Раз планета быстро вращается вокруг оси, то нагрев ее поверхности будет равномерным. При установлении термодинамического равновесия количество поглощенной энергии в единицу времени будет равно количеству излученной энергии:
   $$\frac{LR^2(1-A)}{4a^2}=4\pi R^2\sigma T^4,$$
   откуда $T=\sqrt[4]{\frac{L(1-A)}{16\pi a^2\sigma}}$.

   e) **(1 балл)** Если планета повернута к звезде только одним полушарием, то поглощаемая энергия будет переизлучаться площадью не $4\pi R^2$, а $2\pi R^2$. Тогда $T=\sqrt[4]{\frac{L(1-A)}{8\pi a^2\sigma}}$.

   f) **(1 балл)** Подставляя в последнюю формулу справочные данные (радиусом лунной орбиты можно пренебречь), получаем $T\approx 330K$. Напомним, что это средняя температура лунного полушария, в подсолнечной же точке температура будет существенно выше.

Схема оценивания работ

Следует заметить, что приведенная схема оценивания работ – лишь один из возможных вариантов. Окончательное решение о количестве выставляемых баллов за каждую задачу принимает жюри.