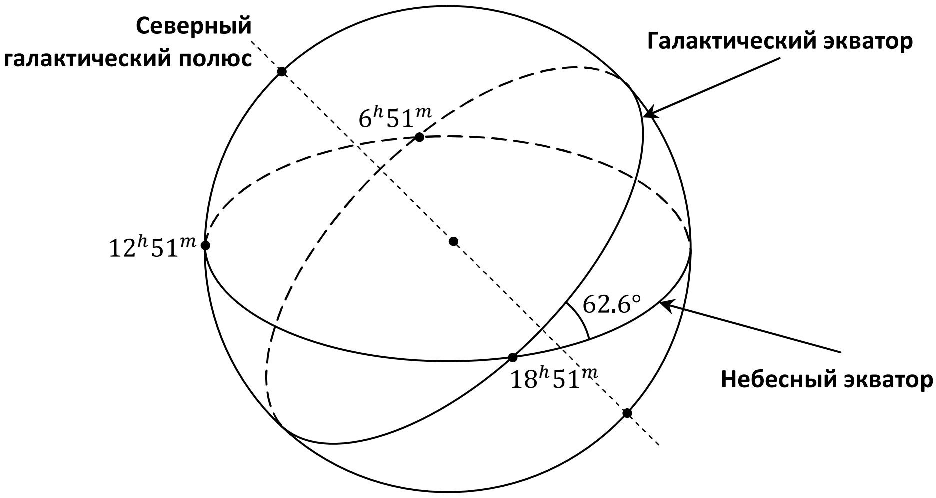
Теоретический тур
Решения задач

1. **(6 баллов за задачу)**
   a. **(2 балла)** Из приведенного ниже чертежа видно, что прямое восхождение северного галактического полюса будет лежать ровно посредине между точками пересечения с горизонтом и составит 12^h51^m. Если наклон галактического экватора равен 62.9°, то галактический полюс будет на расстоянии $90° - 62.9° = 27.1°$. Это и будет склонением полюса.



   b. **(2 балла)** Чтобы Млечный Путь совпал с горизонтом, полюс должен оказаться в зените. Поэтому такая ситуация может реализовываться в любой точке на широте $\varphi_1 = 27.1°$ либо $\varphi_2 = -27.1°$. За первый ответ участник получает 1 балл, за указание вдобавок и южной широты - 2 балла.
   c. **(1 балл)** Поскольку Млечный Путь является большим кругом небесной сферы, то он будет пересекать горизонт под прямым углом в случае, если одна из точек галактического экватора находится в зените. Склонение точек галактического экватора заключено в диапазоне $-62.9 < \delta < +62.9°$, следовательно, и широта будет заключена в пределах $-62.9 < \varphi < +62.9°$.
   d. **(1 балл)** Казалось бы, достаточно взять склонение самых северных точек галактического экватора $\delta_{max} = 62.9°$ и найти для них высоту в верхней кульминации. Однако из предыдущего пункта следует, что в Минске точки галактического экватора могут пересекать зенит. Следовательно, максимальная высота составит $h_{max} = 90°$.

2. (**6 баллов, по 3 балла за каждый из вопросов**) Представим себе, что сначала Луна двигалась по орбите с большой полуосью a и периодом T, а через год перешла на орбиту радиусом $a + \Delta a$ с периодом $T + \Delta T$. Запишем для этих орбит III закон Кеплера:

$$\frac{(T+\Delta T)^2}{T^2} = \frac{(a+\Delta a)^3}{a^3},$$

$$\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)^3.$$

Поскольку $\Delta T \ll T$ и $\Delta a \ll a$, то при раскрытии скобок можно пренебречь квадратами и кубами $\Delta T/T$ и $\Delta a/a$:

$$\frac{2\Delta T}{T} = \frac{3\Delta a}{a},$$

$$\Delta T = \frac{3T\Delta a}{2a} = 2.8 \cdot 10^{-4}\ c.$$

Заметим, что участники олимпиады могут выбрать и другой способ решения: взять значение большой полуоси орбиты Луны и используя массу Земли, найти ее сидерический период. Затем к большой полуоси прибавить 3 см, вычислить новый период и вычислить разность с предыдущим значением. Однако в таком случае может не хватить точности калькулятора - для подобного расчета необходимо оперировать минимум 12-13 разрядами. Поэтому за подобные решения максимальный балл следует выставлять только в случае получения правильного числового значения ΔT.

Аналогичный метод решения применим и для вычисления изменения синодического месяца. Этот период связывается с сидерическим следующим способом:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_Л} - \frac{1}{T_\oplus},$$

откуда $S = 29.5^d$. Эта формула не дается в школьном курсе, но ее легко вывести, представив, что, к примеру, новолуния - это соединения Луны и Солнца, обращающихся вокруг Земли с периодами $T_Л$ и $T_\oplus$. Теперь представим, что звездный месяц увеличился на ΔT:

$$\frac{1}{S + \Delta S} = \frac{1}{T_Л + \Delta T} - \frac{1}{T_\oplus}.$$

Вычтем формулы одна из другой:

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{S + \Delta S} = \frac{1}{T_Л} - \frac{1}{T_Л + \Delta T},$$

$$\frac{\Delta S}{S(S + \Delta S)} = \frac{\Delta T}{T_Л(T_Л + \Delta T)}.$$

Поскольку $\Delta S \ll S$ и $\Delta T \ll T_Л$, то в знаменателе ими можно пренебречь:

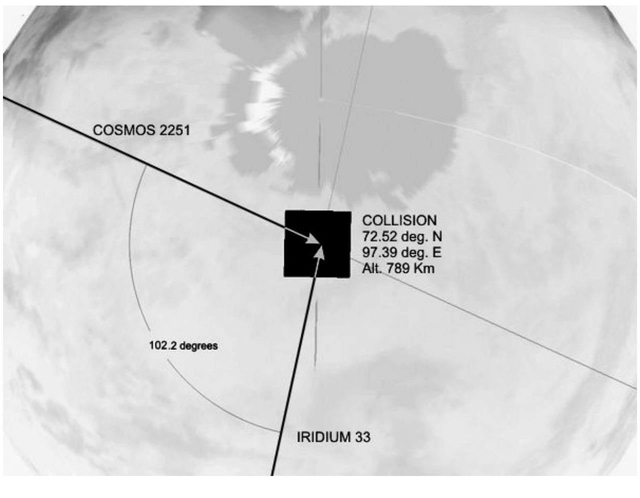
$$\frac{\Delta S}{S^2} = \frac{\Delta T}{T_Л^2},$$

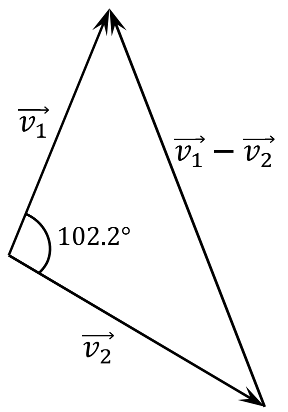
$$\Delta S = \frac{S^2}{T_Л^2}\Delta T = 3.3 \cdot 10^{-4}\ c.$$

3. (**6 баллов за задачу**) Поскольку оба спутника имели круговые орбиты и одинаковую высоту в момент столкновения, то и скорости их были одинаковы. Рассчитаем их (**3 балла**):

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = 7460\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ниже показана схема столкновения спутников над северной частью России.





Для вычисления относительной скорости столкновения нам необходимо вычислить модуль разности векторов $|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}|$. Как видно из схемы слева (треугольник равнобедренный, $v_1 = v_2 = v$),

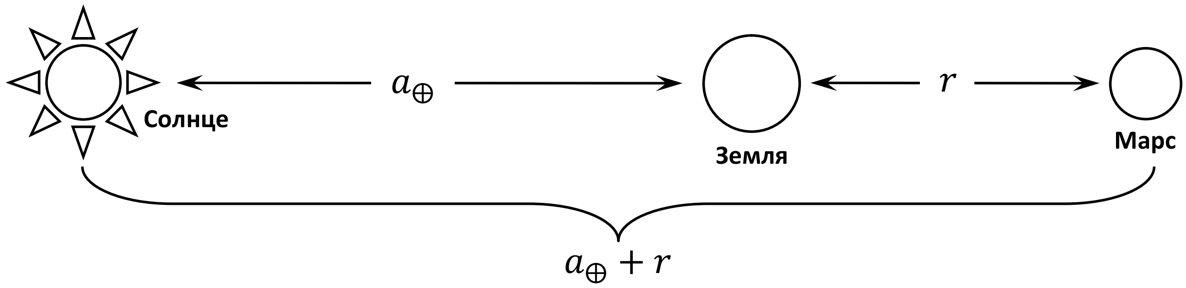
$$|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}| = 2v \sin 51.1° = 11.6 \text{ км/с} .$$

(**3 балла**) Это и есть окончательный ответ задачи.

4. (**6 баллов за задачу**) Определим сначала, во сколько раз две полные Луны светят ярче, чем Марс в противостоянии (**2 балла**):

$$\frac{E_{2\text{Л}}}{E_\text{М}} = 2 \cdot 2.512^{m_\text{М} - m_\text{Л}} = 2 \cdot 2.512^{-1.69+12.7} = 5.07 \cdot 10^4.$$

Основные сложности решения начинаются далее. Казалось бы, блеск Марса обратно пропорционален квадрату расстояния до него, следовательно, для наблюдения описанного явления необходимо уменьшить расстояние до Марса в момент противостояния в $\sqrt{5.07 \cdot 10^4}$ раз.



Однако Марс не является самосветящимся телом, а отражает свет Солнца. Поэтому его блеск будет обратно пропорционален не только квадрату расстояния до Земли, но и квадрату расстояния от Солнца. В момент противостояния это условие можно записать так:

$$E_\text{М} \propto \frac{1}{(a_\oplus + r)^2 r^2},$$

где r - расстояние Марса от Земли. В момент среднего противостояния $r = (1.524 - 1) \text{ а. е.} = 0.524 \text{ а. е.}$ Тогда запишем для "противостояния" 27 августа и "обычного" противостояния соотношение (расстояния указаны в а.е.):

$$\frac{E_{\text{М}1}}{E_{\text{М}2}} = \frac{(1 + 0.524)^2 \cdot 0.524^2}{(1 + r)^2 r^2} = 5.07 \cdot 10^4.$$

$$(1 + r)^2 r^2 = 1.26 \cdot 10^{-5}.$$

Данное уравнение возможно решить лишь численным методом либо просто подбором, получится $r = 0.00354 \text{ а. е.} = 530$ тыс. км. Впрочем, сразу можно заметить, что $r \ll 1$ и уравнение можно упростить:

$$r^2 = 1.26 \cdot 10^{-5},$$
$$r = 0.00355 \text{ а. е.}$$

Как видим, при упрощении уравнения ответ отличается от правильного лишь в третьем знаке, поэтому за оба результата рекомендуется выставлять максимальный балл (**4 балла. Если же участник считал блеск зависящим только от расстояния до Земли, то 2 балла**).

Сама же "утка" уходит корнями в 2003 год. Тогда 27 августа Марс подошел к Земле на минимальное расстояние за последние 60 000 лет. Но даже на рекордно малом расстоянии он выглядел не как две Луны, а всего лишь яркой звездой -3^m.

5. (**6 баллов за задачу**) Вычислим разрешающую способность обоих телескопов (**3 балла**):

$$\psi_H = 140/2400{=}0.058'',$$
$$\psi_{VLT} = 140/8200{=}0.017''$$

Определим размеры минимально различимых деталей (подставляя ψ в радианах) (**3 балла**):

$l_H = a_{Л} \cdot \psi \approx 100$ м - для телескопа "Хаббл",
$l_{VLT} = a_{Л} \cdot \psi \approx 32$ м - для VLT.

Как видим, различить американские объекты на Луне при таком разрешении вряд ли представляется возможным (не забываем еще и про влияние атмосферы для земных телескопов, даже если на них есть адаптивная оптика). Кстати, на VLT, исполняя тот самый анонимный заказ, решили вести съемку в тот момент, когда Солнце в снимаемом месте находилось очень низко - тогда тени от предметов могли оказаться куда больше их размеров. Однако и в этом случае результат съемки был отрицательным.

В то же время на низкой окололунной орбите давно работает зонд LRO, оборудованный камерой высокого разрешения. И он давно уже сфотографировал и "Луноходы", и "Аполлоны", и даже тень от американского флага.

Всего - 30 баллов за теоретический тур