

LONG QUESTIONS

1. Спутник вращается вокруг планеты таким образом, что плоскость его орбиты перпендикулярна поверхности этой планеты, на которой и находится наблюдатель. Пусть орбита спутника удовлетворяет следующему уравнению:

$$9\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} - 4\right)^2 + 25\left(-\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = 225$$

Используйте Декартовы координаты, x соответствует горизонту, y – направлению в зенит. Пусть r – радиус спутника. Считайте, что период вращения планеты намного больше орбитального периода спутника. Атмосферной рефракцией пренебречь.

- Вычислите большую и малую полуось эллипса.
- Вычислите зенитное расстояние спутника в момент перигея.
- Определите $\tan \frac{\theta}{2}$, где θ – высота верхнего края Луны, при котором она занимает наибольшую угловую площадь для наблюдателя.

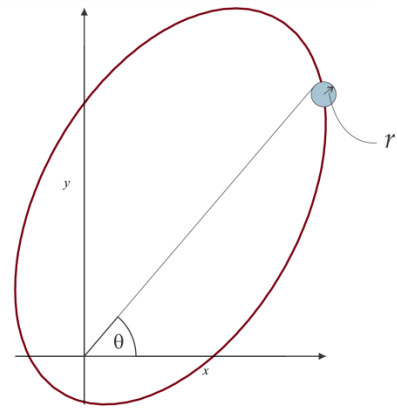


Рис. 1

2. Две массивные звезды A and B имеют массы m_A и m_B , расстояние между ними равно d . Обе звезды вращаются вокруг общего центра масс под действием силы гравитационного притяжения. Будем считать, что орбиты звёзд круговые и лежат в плоскости X - Y , а начало координат находится в центре масс системы (см. Рис. 2)

Наблюдатель находится в плоскости Y - Z (см. Рис. 2) на большом расстоянии от звёзд, угол между направлением на наблюдателя и осью Z равен θ . Наблюдатель обнаружил, что лучевая скорость звезды A имеет вид $K \cos(\omega t + \epsilon)$, где K и ϵ положительны.

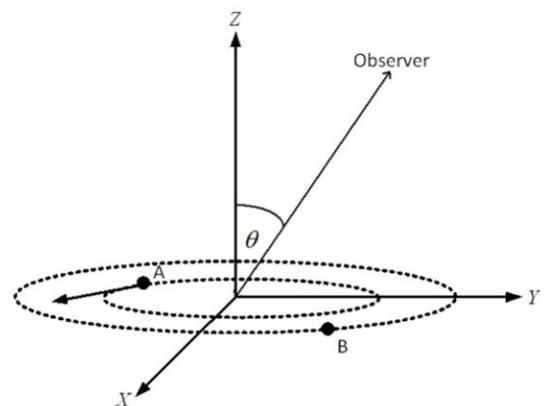


Рис. 2

- a. Напишите выражения для тангенциальной и угловой скоростей звезды А.
- b. Выразите $K^3/\omega G$ через m_A , m_B и θ , где G – гравитационная постоянная.

Предположим, что наблюдатель определил массу звезды А, которая составила $30 M_s$, где M_s - масса Солнца. Кроме того, он обнаружил рентгеновское излучение от звезды В, а это значит, что она является или нейтронной звездой, или чёрной дырой. Конкретный тип объекта зависит от m_B , т.е.:

- i) Если $m_B < 2M_s$, то звезда В является нейтронной звездой;
- ii) Если $m_B > 2M_s$, то это чёрная дыра.

- c. Измерения, выполненные наблюдателем, показали, что $\frac{K^3}{\omega G} = \frac{1}{250} M_s$. Обычно на практике величина угла θ не известна. При каких значениях угла θ звезда В является чёрной дырой?

3. Пусть звезда сферически симметрична и состоит из N нейтральных частиц с радиусом R (рис. 3).

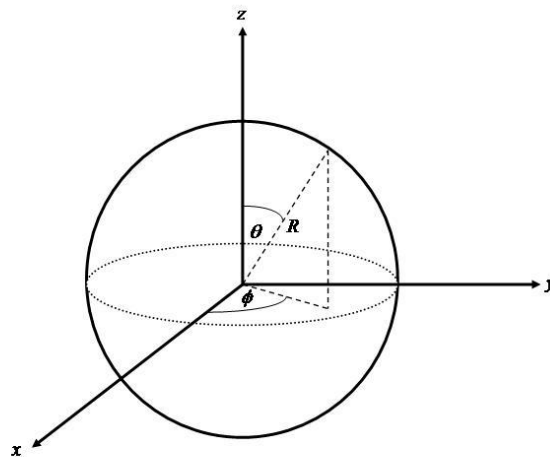


Рисунок 3

в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, выполняется следующее уравнение состояния

$$P V = N k \frac{T_R - T_0}{\ln(T_R/T_0)} \quad (1)$$

где P и V - давление внутри звезды и её объем соответственно, k – это постоянная Больцмана. T_R - температура на поверхности при $r = R$, T_0 и температура в центре при $r = 0$. Предположим, что $T_R \leq T_0$.

- а. Упростите уравнение состояния (1), если $\Delta T = T_R - T_0 \approx 0$ (назовем это «идеальной звездой») (вы можете использовать следующее приближение $\ln(1+x) \approx x$ для малых x)

Предположим, в звезде происходит квазистатический процесс, при котором она может немного сжиматься или расширяться, при этом уравнение состояния звезды (1) остается в силе.

В звезде выполняется первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta M c^2 + W \quad (2)$$

,где Q , M , и W это теплота, масса, и совершенная работа, соответственно, а c – скорость света в вакууме, $\Delta M \equiv M_{\text{final}} - M_{\text{initial}}$.

В дальнейшем, предположим, что T_0 постоянна, а $T_R \equiv T$ изменяется.

- б. Найдите выражение для теплоемкости при постоянном объеме (C_v) как функцию M и выражение для теплоемкости при постоянном давлении (C_p), выраженное через C_v и T (Вы можете использовать приближение $(1+x)^n \approx 1+nx$ для малых x)

Предположим, что C_v постоянна, а в звезде происходит изобарический процесс, при котором она выделяет теплоту и излучает её в пространство.

- с. Найдите выражение для теплоты при изобарическом процессе, если начальная и конечная температуры T_i и T_f соответственно.
- д. С этим пунктом **что-то пошло не так**, его делать не нужно.

Теперь предположим, что звезда, про которую идёт речь- Солнце.

- е. В предположении того, что солнечный свет монохроматичен и имеет частоту 5×10^{14} Гц, определите количество фотонов, излучённых Солнцем в секунду.
- ф. Определите теплоемкость C_v для Солнца в предположении того, что поверхностная температура стремительно изменяется от 5500 К до 6000 К за одну секунду.