

Часть 1

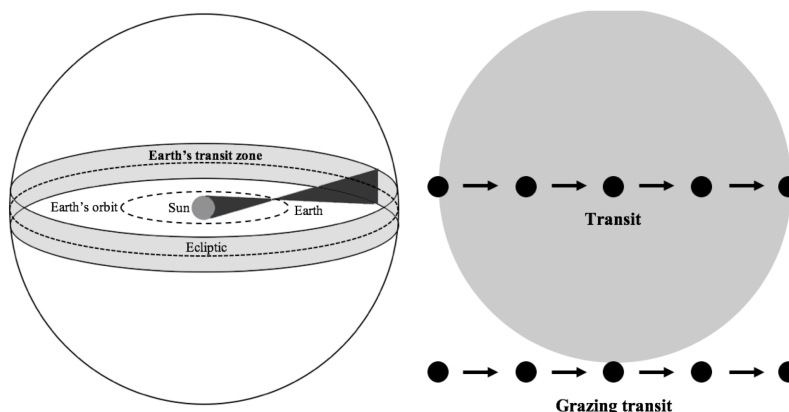
Задача 1. Большое Магелланово Облако в Пхукете [10 баллов]

Экваториальные координаты БМО: $R.A. = 5^h 24^m$, $Dec = -70^\circ 00'$;
географические координаты Пхукета: $7^\circ 53' N$, $98^\circ 24' E$.

В какой день года кульминация БМО наблюдается в Пхукете в 9 вечера? Гринвичское звёздное время GST в 00^h 1 января того же года равно $6^h 43^m$, а Пхукет находится в часовой зоне UT+7.

Задача 2. Зона земных транзитов [10 баллов]

Earth's Transit Zone (ETZ) — область пространства, в которой далёкие внеземные наблюдатели могут фиксировать прохождения Земли по диску Солнца. Для землянина эта область соответствует полосе небесной сферы, охватывающей эклиптику (см. рисунок). Полагайте орбиту Земли круговой с радиусом 1 а.е.



1. Earth's Transit Zone – см. выше, Sun – Солнце, Earth – Земля, Earth's orbit – орбита Земли, Ecliptic – эклиптика.
2. Transit – полное прохождение, Grazing Transit – «цепляющее» прохождение.

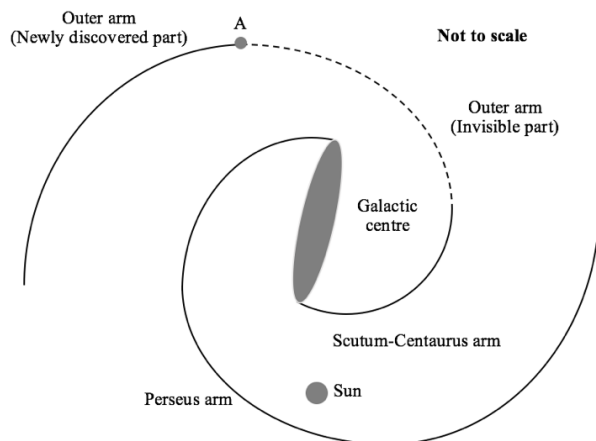
Найдите ширину (в градусах) той части ETZ, из которой могут наблюдаться

- а) полные прохождения (диск Земли полностью проецируется на Солнце); [5]
- б) по крайней мере, «цепляющие» прохождения (хотя бы часть диска Земли проецируется на Солнце). [5]

Задача 3. Новый далёкий внешний рукав Галактики [10 баллов]

В 2010 году Dame и Thaddeus нашли новую часть внешнего рукава Млечного Пути, изучая линию CO на 1.2-метровом телескопе CfA. Они обнаружили начало облака CO на галактической долготе $\ell = 13.25^\circ$ (точка A на рисунке), где газ имеет гелиоцентрическую лучевую скорость -20.9 км/с.

Считайте, что на расстоянии больше 5 кпк от центра Галактики кривая вращения плоская. Солнце движется вокруг центра Галактики на расстоянии 8.5 кпк от него со скоростью 220 км/с.



Не в масштабе

Sun – Солнце,
Galactic Centre – центр Галактики;
Perseus/Scutum-Centaurus/Outer arm –
рукав Персея/Щита-Кентавра/Внешний;
Newly discovered/invisible part –
новая открытая/невидимая часть.

Найдите расстояние от начала рукава (точка A)

- а) до центра Галактики; [7]
- б) до Солнца. [3]

Задача 4. Обозревая 21 см

[10 баллов]

Радиотелескоп оборудован приёмником, позволяющим производить наблюдения в диапазоне частот 1.32 – 1.52 ГГц. Предел чувствительности приёмника составляет 0.5 мЯн в луче диаграммы направленности за 1 минуту накопления сигнала. Светимость типичной галактики на линии НІ составляет 10^{28} Вт при ширине линии 1 МГц. Достаточно широкий луч позволяет рассматривать регион НІ далёкой галактики как точечный источник. В лабораторной системе отсчёта линия нейтрального водорода НІ имеет частоту 1.42 ГГц.

Галактика с каким наибольшим красным смещением z может быть зарегистрирована на данном радиотелескопе? Полагайте, что красное смещение мало, и используйте нерелятивистское приближение. $1 \text{ Ян} = 10^{-26} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц})$.

Задача 5. Геосинхронный спутник

[10 баллов]

Геосинхронный спутник обращается вокруг Земли с периодом, равным периоду вращения Земли вокруг своей оси, на высоте 35786 км над поверхностью планеты. Наклонение орбиты спутника к плоскости экватора составляет $\theta = 6.69^\circ$. Вычислите точное значение максимально возможной высоты спутника для наблюдателя на широте $\phi = 51.49^\circ$. Рефракцией в атмосфере Земли пренебречь.

Часть 2

Задача 6. Сверхновая 1987А

[15 баллов]

SN 1987А на пике яркости 15 мая 1987 года имела видимую звёздную величину 3^m , а затем плавно уменьшала блеск, перестав быть видимой невооружённым глазом к 4 февраля 1988 года. Предположим, что яркость B экспоненциально уменьшалась со временем t , так что $B = B_0 e^{-t/\tau}$, где B_0 и τ — некоторые постоянные. Предельная звёздная величина для невооружённого глаза равна 6^m .

- а) Определите значение τ в днях. [5]
- б) Найдите последний день, когда сверхновая ещё была доступна для наблюдения в 6-дюймовый (15.24 см) телескоп с коэффициентом эффективности 70%. Диаметр человеческого зрачка примите равным 0.6 см. [10]

Задача 7. Давайте поговорим про это

[20 баллов]

Одним из вероятных мест для поиска жизни являются планеты, обращающиеся вокруг звёзд главной последовательности. Исходить будем из того, что планеты имеют диапазон температур, подобный земному, с малыми температурными колебаниями. Примем для звёзд главной последовательности следующее усреднённое соотношение масса – светимость:

$$L \propto M^{3.5}.$$

Предположите, что полная энергия E , выделяемая за время жизни звезды, прямо пропорциональна её массе, а время жизни Солнца на главной последовательности составит около 10 млрд лет. Спектральная классификация звёзд приведена в таблице ниже; подклассы (0-9) присваиваются в линейной зависимости от $\log(M/M_\odot)$.

Спектральный класс	O5V	B0V	A0V	F0V	G0V	K0V	M0V
Масса, M_\odot	60	17.5	2.9	1.6	1.05	0.79	0.51

- а) Разумной жизни нужно по крайней мере 4 млрд лет, чтобы развиваться. Какой спектральный класс (с точностью до подкласса) может иметь самая массивная звезда, в окрестностях которой имеет смысл искать разумную жизнь? [6]
- б) Рассмотрим планету, имеющую такую же излучательную способность ε и альбедо a , что и Земля, а помимо того — такую же температуру. Выразите расстояние d (в а.е.) между планетой и её светилом при массе светила M . [6]
- с) Наличие планеты может быть установлено по вариации лучевой скорости звезды; наименьший регистрируемый сдвиг длины волны составляет $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-10}$. Какую наименьшую массу m (в массах Земли) может иметь планета из (б), которую можно обнаружить у звезды из (а)? [8]

Задача 8. Вифлеемская звезда

[20 баллов]

Будем называть «прекрасным» соединение Юпитера и Сатурна для земного наблюдателя, а орбиты названных планет — считать круговыми.

Промежуток времени между последовательными «прекрасными» соединениями может несколько варьироваться при наблюдении с Земли, поэтому для усреднения перенесём наблюдателя в центр Солнечной системы.

- а) Найдите средний промежуток времени (в годах) и средний гелиоцентрический угол (в градусах) между двумя последовательными «прекрасными» соединениями. [6]
- б) Ближайшее «прекрасное» соединение состоится 21 декабря 2020 года при восточной элонгации планет 30.3° . Укажите,* в каком созвездии будет наблюдаться это явление. [2]

В 1606 году Иоганн Кеплер определил, что в некоторые годы «прекрасные» соединения могут происходить трижды за год из-за попятного движения планет. Он также показал, что такое случилось в 7 году до болометрической поправки, что могло стать известным как Вифлеемская звезда. При расчётах забейте на прецессию земной оси.

Укажите,* в каком созвездии

- с) происходили «прекрасные» соединения в 7 году до н. э.; [8]
- д) с точки зрения земного наблюдателя находилось Солнце во время среднего из соединений серии. [4]

Задача 9. Утечка газа

[20 баллов]

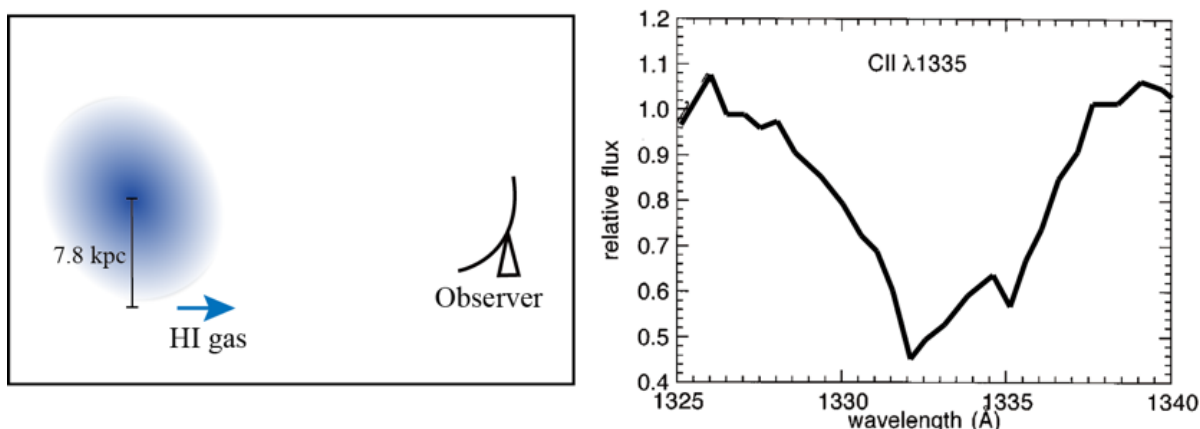
Сампоп сотоварищи в 2004 году произвёл наблюдения дисковой галактики с активным звездообразованием IRAS 0833+6517 в линии HI на радиоинтерферометре VLA. Эта галактика располагается на расстоянии 80.2 Мпк, угол наклона её оси к лучу зрения — 23° . Согласно полученной карте скоростей, эта галактика вращается, причём наблюдаемая лучевая скорость газа на расстоянии 7.8 кпк от её центра составляет 5850 км/с.

Истечение газа из IRAS 0833+6517 обнаружено по линиям межзвёздного поглощения, претерпевшим голубое смещение, на фоне континуума звёздного излучения. Полагая, что галактика гравитационно устойчива и все её компоненты движутся по круговым орбитам,

- а) определите скорость вращения галактики v_{rot} на приведённом радиусе; [5]
- б) вычислите скорость убегания для пробной частицы в газовом потоке на том же радиусе 7.8 кпк; [9]

*Используйте полное или трёхбуквенное обозначение созвездия по IAU, например, Ursa Major или UMa.

- с) укажите, может ли газовый выброс на этом радиусе преодолеть гравитацию галактики, используя данные о доплеровском смещении линии поглощения C II $\lambda 1335$. При построении графика поправка на космологическое удаление галактики уже произведена. Дополнение: в лабораторной системе отсчёта указанная линия имеет длину волны 1335 \AA . [6]



Observer – наблюдатель, HI gas – нейтральный водород, kpc – килопарсек;
relative flux – относительный поток, wavelength – длина волны.

Задача 10. Идите на

[25 баллов]

Gravitational-Wave Optical Transient Observer (GOTO) предназначен для поиска оптических остатков источников гравитационных волн различной природы в течение одного часа после их обнаружения системами LIGO и VIRGO. В обзоре необходимо покрыть большую площадь неба за короткое время, чтобы найти все возможные области, которые указаны гравитационными обсерваториями, прежде чем оптическая вспышка потухнет. Система GOTO состоит из 4 одинаковых рефлекторов с диаметром 40 см и относительным отверстием 1 : 2.5, одновременно фотографирующих крупный участок неба. Для простоты положим, что поля телескопов не перекрываются.

- Вычислите масштаб изображений, получаемых на данных телескопах в их фокальных плоскостях, в угловых единицах на мм. [6]
- Нуль-пункт (когда частота отсчётов детектора составляет 1 в секунду) для данной системы составляет 18.5^m . Рассчитайте минимальное время накопления сигнала для точечного источника 21^m , если необходимо достичь соотношения сигнал/шум $SNR = 5$. Будем считать, что основными источниками ошибок здесь являются шум считывания $RON = 10$ отсчётов в пикселе и тепловой шум $DN = 1 \text{ мин}^{-1}$ отсчёт в пикселе. Используемые ПЗС-матрицы имеют пиксели размером 6 мкм и усиление (соотношение между количеством фотоэлектронов и отсчётами) $gain = 1$. Типичный размер атмосферных изображений

звёзд в местоположении обсерватории $\text{seeing} = 1.0''$. Соотношение сигнал-шум при времени экспозиции t определяется как

$$\text{SNR} \equiv \frac{\text{Полное число отсчётов}}{\sqrt{\sum_i \text{Шум}_i^2}} = \frac{\text{Полное число отсчётов}}{\sqrt{\sigma_{\text{RON}}^2 + \sigma_{\text{DN}}^2 + \dots}},$$

где $\sigma_{\text{RON}} = \sqrt{N_{\text{pix}} \cdot \text{RON}^2}$, $\sigma_{\text{DN}} = \sqrt{N_{\text{pix}} \cdot \text{DN} \cdot t}$. [8]

- с) Определите соотношение между SNR и t в случае, когда время экспозиции и количество отсчётов велики, так что основной вклад в ошибку вносит пуассоновский шум. Пересчитайте минимальное время экспозиции для источника 21^m при $\text{SNR} = 5$ как в пункте (b), учитывая пуассоновский шум. Он определяется как стандартное отклонение $\sigma_{\text{source}} = \sqrt{\text{Количество отсчётов}}$. В действительности, фон ночного неба также является источником шума, но, будьте добры, забейте. [6]
- d) Характерная неопределённость определения положения источника гравитационных волн составляет порядка $100 \square^\circ$. Наша хотелка: покрыть всё это безобразие наблюдениями в течение часа вплоть до той самой звёздной величины. Оцените минимальную длину стороны матриц (в пикселях), которые нужно использовать, чтобы нас полностью удовлетворить. Временами перезарядки и перенацеливания системы пренебречь. [5]

Часть 3

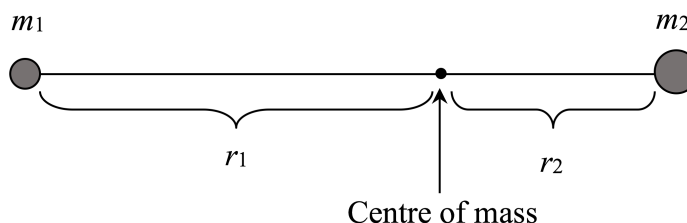
Задача 11. Масса Местной группы галактик

[50 баллов]

Динамика МЗ1 (галактика Андромеды) и Млечного пути (MW) может быть использована для определения полной массы Местной группы. Основная идея состоит в том, что галактики можно представить как двойную систему, образовавшуюся примерно в одной и той же точке пространства вскоре после Большого взрыва. Так или иначе, масса Местной группы в основном определяется массами МЗ1 и MW. По доплеровскому смещению спектральных линий определили, что МЗ1 приближается к MW со скоростью 118 км/с. Авторами это кажется неожиданным, учитывая, что большинство галактик удаляются друг от друга по закону Хаббла. Допустим, тот факт, что МЗ1 движется в сторону MW, допустим, обусловлен тем, что их взаимное гравитационное притяжение в конечном итоге изменило начальные скорости. В принципе, если пара галактик хорошо описывается как изолированные точечные массы, их общая масса может быть определена из расстояния между ними, их относительной скорости и времени с начала Вселенной. Kahn и Woltjer в 1959 году использовали этот метод для оценки массы Местной группы.

Мы будем следовать этому приближению в вычислениях так:

- а) Рассмотрим изолированную систему с пренебрежимо малым угловым моментом двух точечных масс m_1 и m_2 с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре масс (centre of mass) системы.



Выразите полную механическую энергию E этой системы через $m_1, m_2, r_1, r_2, v_1, v_2$ и G , где v_i — соответствующая радиальная скорость массы m_i . [5]

- б) Преобразуйте полученное в пункте (а) выражение через r, v, μ, M и G , где $r = r_1 + r_2$ — расстояние между m_1 и m_2 , v — скорость изменения расстояния r , $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса системы, а $M = m_1 + m_2$ — полная масса системы. [10]

- с) Покажите, что из выражения, полученного в предыдущем пункте, следует

$$v^2 = 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

где r_0 — это новая константа. Выразите r_0 через μ, M, G и E .

Решение дифференциального уравнения из пункта (b) приведено ниже в параметрической форме при начальном условии $r(t = 0) = 0$:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{2} (1 - \cos \theta),$$
$$t(\theta) = \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}} (\theta - \sin \theta),$$

где параметр θ выражен в радианах. [5]

d) При помощи приведённых выше параметрических уравнений покажите, что

$$\frac{vt}{r} = \frac{\sin \theta \times (\theta - \sin \theta)}{(1 - \cos \theta)^2}. \quad [10]$$

e) Теперь соотнесём рассмотренные материальные точки с M31 и MW. Текущие значения величин составляют $v = -118$ км/с, $r = 710$ кпк, а вместо t можно подставить возраст Вселенной (13700 млн лет). Найдите значение θ методом численных итераций.

f) Найдите r_{\max} , используя полученное ранее значение θ . Также рассчитайте величину M в массах Солнца. [10]

Задача 12. Кораблекрушение

[40 баллов]

Вы потерпели кораблекрушение и попали на остров. К счастью, вы все еще носите часы, установленные на бангкокское время. Также у вас есть компас, звёздный атлас и водонепроницаемый калькулятор. Вначале вы были без сознания; очнувшись, вы обнаружили, что недавно стемнело. Увы, облачно. Через час или около того вы увидели в разрывах облаков Ориона; определили, что Ригель находится на высоте примерно 52.5° над горизонтом, а при помощи компаса удалось установить, что астрономический азимут равен 109° . Ваши часы показывают 01:00 21 ноября 2017 г. Вы ещё помните, что GST в 00^h 1 января 2017 года составляет 6^h 43^m, а координаты Ригеля R.A. = 5^h 15^m и Dec = $-8^\circ 11'$. Время Бангкока — UT+7.

Найдите:

- a) местный часовой угол Ригеля; [10]
- b) текущее гринвичское звёздное время; [10]
- c) долготу острова; [5]
- d) широту острова с точностью до угловой минуты. [15]

Задача 13. Экзолуна

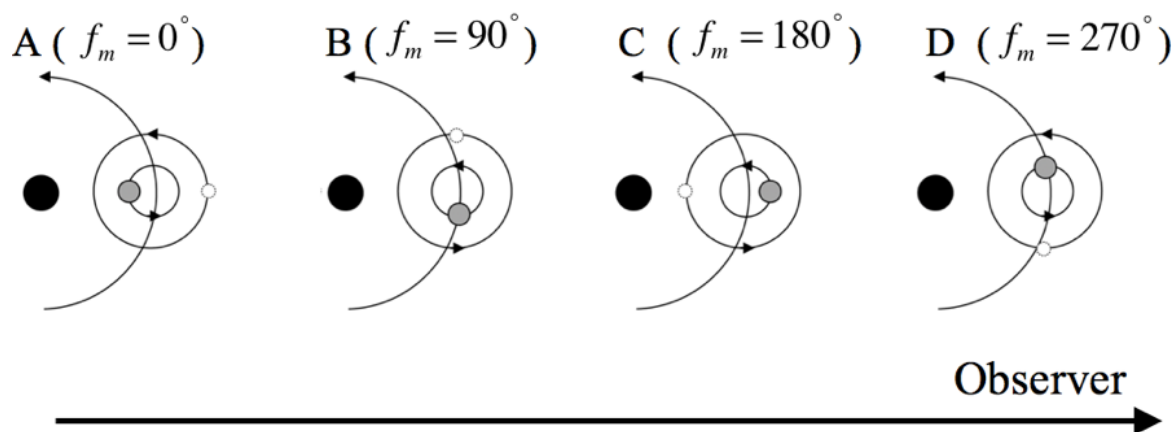
[60 баллов]

Экзолуны — естественные спутники экзопланет. Гравитационное взаимодействие лун с их планетами влияет на положение планеты относительно барицентра системы планета-луна, что приводит к вариации времени транзитов σ_{TTV} ; и вариации продолжительности транзитов σ_{TDV} , то есть наблюдаемый транзит планеты наступает чуть раньше или позже, а также длится чуть дольше или короче предсказанного времени (по сравнению с планетой без луны).

Будем рассматривать круговые орбиты, плоскость которых параллельна лучу зрения («ребром»), со следующими параметрами:

- M_p масса планеты;
- M_m масса луны;
- P_p период обращения барицентра системы планета-луна вокруг центральной звезды;
- P_m период обращения луны вокруг планеты;
- a_p расстояние между барицентром системы планета-луна и центральной звездой;
- a_m расстояние между луной и барицентром системы планета-луна;
- f_m фаза луны; $f_m = 0^\circ$, когда луна находится в противостоянии с центральной звездой;
- τ средняя продолжительность транзита планеты (как если бы луны не было).

Будем рассматривать орбиту луны, лежащую в плоскости орбиты планеты; направления орбитальных движений луны и планеты совпадают. Примеры фаз луны для далёкого наблюдателя приведены на картинке:



Фазы луны. Observer – наблюдатель.

Чёрным, серым и белым кругами изображены звезда, планета и луна соответственно.

- а) Введём $\sigma_{TTV} \equiv t_m - t$, где t и t_m — предсказанное (без луны) и фактическое время транзита соответственно. Покажите, что

$$\sigma_{TTV} = \left[\frac{a_m M_m P_p}{2\pi a_p M_p} \right] \sin f_m.$$

Положительное значение σ_{TTV} означает, что транзит происходит позже предсказанного. [8]

- б) Аналогично, $\sigma_{TDV} \equiv \tau_m - \tau$ для продолжительностей транзитов. Можем полагать скорость движения планеты вокруг звезды гораздо большей, чем луны — вокруг планеты, а также что фаза луны не успевает измениться за время транзита. Покажите, что

$$\sigma_{TDV} = \tau \left[\frac{P_p M_m a_m}{P_m M_p a_p} \right] \cos f_m.$$

Положительное значение σ_{TDV} означает, что перевод происходит дольше запланированного. [11]

Наблюдается транзит экзопланеты по диску звезды глазной последовательности солнечного типа ($1M_\odot, 1R_\odot$, спектральный класс G2V). Орбита планеты круговая и наблюдается «с ребра», период обращения — 3.50 сут. Из данных наблюдений известно, что масса планеты составляет $120 M_\oplus$, радиус — $12 R_\oplus$, а соотношение между σ_{TTV} и σ_{TDV} имеет вид

$$\sigma_{TDV}^2 = -0.7432\sigma_{TTV}^2 + 1.933 \times 10^{-8} \text{ сут.}^2$$

- с) Пренебрегая массой луны по сравнению с массой планеты, найдите среднюю продолжительность транзита планеты τ в сутках. [7]
 d) Найдите период луны P_m в сутках. [8]
 e) Оцените расстояние между луной и барицентром системы планета-луна a_m в радиусах Земли. Также найдите массу луны M_m в массах Земли. [7]
 f) По мнению переводчиков, сферой Хилла называют область пространства вблизи планеты, где она может иметь собственные спутники, несмотря на тяготение центрального тела. Её радиус для планеты может быть выражен как

$$R_h = a_p \sqrt[3]{\frac{M_p}{x M_*}},$$

где M_* — масса звезды.

Найдите значение постоянной x . Для не очень умных: при достаточно массивной центральной звезде радиус сферы Хилла примерно равен расстоянию между планетой и точками Лагранжа L_1 и L_2 . Затем найдите радиус сферы Хилла для данной планетарной системы в радиусах Земли. [12]

- g) Предел Роша — минимальный радиус орбиты, при котором луну не разрывает приливными силами. Короче,

$$R_r = 1.26 R_p \sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_m}},$$

где ρ_p и ρ_m — плотности планеты и луны соответственно, R_p — радиус планеты. Луна каменная, с плотностью, равной плотности Земли. Найдите предел Роша для этой системы. [3]

- h) Укажите, стабильна ли орбита луны? [4]