

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
XV РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ

Решения и схема оценивания заданий
теоретического тура

30 марта - 4 апреля 2009 года

Короткие задачи (30 баллов)

1. Найдите высоту центра Солнца в меридиане в день летнего солнцестояния в Минске ($\varphi = 53^\circ 51'$, $\lambda = 27^\circ 30'$).

Высоту центра Солнца в меридиане находим по формулам:

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - 53^\circ 51' + 23^\circ 27(6)' = 59^\circ 36(5)',$$

$$h_H = -90^\circ + \varphi + \delta = -90^\circ + 53^\circ 51' + 23^\circ 27(6)' = -12^\circ 42(3)'.$$

Ответ: $h_B = 59^\circ 36(5)'$, $h_H = -12^\circ 42(3)'$.

2. Рассчитайте продолжительность венерианских солнечных суток ($T_1 = 243.01$ сут, $T_2 = 224.70$ сут).

Интерпретируем венерианские солнечные сутки как синодический период обращения точек поверхности Венеры относительно Солнца:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \Rightarrow S = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = \frac{224.70 \times 243.01}{224.70 - 243.01} = -2982.21 \text{ (сут)}.$$

Знак минус означает, что Солнце восходит на "западе" и заходит на "востоке".

Ответ: $S = -2982.21$ суток.

3. Считая Землю сферой, определите кратчайшее расстояние по ней от Минска до Москвы ($\varphi = 55^\circ 45'$, $\lambda = 37^\circ 42'$).

Определяем длину большого круга между Минском и Москвой в радианах по формуле $\alpha = \arccos(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)) = \arccos(\sin 53^\circ 51' \times \sin 55^\circ 45' + \cos 53^\circ 51' \times \cos 55^\circ 45' \times \cos(27^\circ 30' - 37^\circ 42')) = 0.108$ (рад). Кратчайшее расстояние от Минска до Москвы по поверхности $L = R\alpha = 6371 \times 0.107 = 686$ (км).

Ответ: $L = 686$ км.

4. Найдите большую полуось спутника, скорость которого на высоте 600 км от поверхности Земли равна 5 км/с.

Используем формулу $v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$. Получим:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{GM} = \frac{2}{6371000 + 600000} - \frac{5000^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}} = 2.24 \times 10^{-7} \text{ (м}^{-1}\text{)}.$$

Отсюда $a = 4460000 \text{ м} = 4460 \text{ км}$.

Вывод: такой спутник невозможен — он врежется в Землю.

Ответ: $a = 4460 \text{ км}$ — суборбитальный полет.

5. Используя правило Тициуса-Боде, оцените величину большой полуоси гипотетической планеты Фэтон.

Запишем правило Тициуса-Боде: $a_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n$.

В ряду больших планет пустое место для $n = 3$. Поэтому $a_3 = 0.4 + 0.3 \times 2^3 = 2.8 \text{ (а.е.)}$.

Ответ: $a_3 = 2.8 \text{ а.е.}$

6. Рассчитайте третью космическую скорость для Луны в приближении круговых орбит ее и Земли.

Третью космическую скорость для Луны рассчитываем по формуле:

$$v_{3к} = \sqrt{v_{23}^2 + v_{2Л}^2 + v_{доп}^2},$$

где

$$v_{23}^2 = \frac{2GM_3}{a_Л + R_Л} = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{(384400 + 1738) \times 10^3} = 2.075 \times 10^6 \text{ (м}^2/\text{с}^2\text{)}$$

$$v_{2Л}^2 = \frac{2GM_Л}{R_Л} = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 7.35 \times 10^{22}}{1738 \times 10^3} = 5.641 \times 10^6 \text{ (м}^2/\text{с}^2\text{)}$$

$$v_{доп} = \sqrt{2\frac{GM_С}{a_3}} - \sqrt{\frac{GM_С}{a_3}} - \sqrt{\frac{GM_3}{a_Л}}$$

$$v_{доп} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}{1.496 \times 10^{11}}} - \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{3.844 \times 10^8}} = 11314 \text{ (м/с)}$$

Наконец:

$$v_{3к} = \sqrt{2.075 \times 10^6 + 5.641 \times 10^6 + 11314^2} = 11650 \text{ (м/с)} = 11.65 \text{ (км/с)}.$$

Ответ: $v_{3к} = 11.65 \text{ км/с}$.

7. Сравните силы притяжения Солнцем и Землей Луны. Почему Луна не падает на Солнце?

Используем закон всемирного тяготения.

Сила притяжения Солнцем Луны:

$$F_1 = \frac{GM_С M_Л}{(a_3 - a_Л)^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30} \times 7.35 \times 10^{22}}{(149600.0 - 384.4)^2 \times 10^{12}} = 4.38 \times 10^{20} \text{ (Н)}.$$

Сила притяжения Землей Луны:

$$F_2 = \frac{GM_З M_Л}{a_Л^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times 7.35 \times 10^{22}}{384.4^2 \times 10^{12}} = 1.98 \times 10^{20} \text{ (Н)}.$$

Сила притяжения Солнцем Луны в $\frac{F_1}{F_2} = \frac{4.38}{1.98} = 2.21$ раза больше силы притяжения Землей Луны.

Луна "падает" на Солнце вместе с Землей.

Ответ: сила притяжения Солнцем в 2.21 раза больше чем Землей.

8. Сравните разрешающую способность телескопа в зеленых $\lambda_З = 550 \text{ нм}$ и красных $\lambda_К = 700 \text{ нм}$ лучах.

Минимальный угол зрения телескопа с круглым входным отверстием определяем по формуле $\psi = 1.22 \frac{\lambda}{D}$.

Разрешающая способность обратно пропорциональна минимальному углу зрения $\frac{\psi_К}{\psi_З} = \frac{700}{550} = 1.27$.

Ответ: разрешающая способность телескопа в зеленых лучах в 1.27 раза больше, чем в красных.

9. Найдите абсолютную звездную величину цефеиды, период пульсации которой 2 суток.

Абсолютную звездную величину цефеиды находим по формуле:

$$M = -1.25 - 3.00 \lg P = -1.25 - 3 \times \lg 2 = -2.15.$$

Ответ: $M = -2.15$.

10. Определите радиус сферы Шварцшильда для Земли.

Радиус сферы Шварцшильда находим по формуле:

$$R_{\text{Ш}} = \frac{2GM_3}{c^2} = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{300000000^2} = 0.00886 \text{ (м)} = 8.86 \text{ (мм)}.$$

Ответ: $R_{\text{Ш}} = 8.86 \text{ мм}$.

11. С какой скоростью относительно Солнца движется Вега? ($\pi'' = 0.129''$, $\mu_\alpha = 0.0172 \text{ s/год}$, $\mu_\delta = 0.288 \text{ ''/год}$, $\delta = 38^\circ 47' 24''$, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -4.60 \times 10^{-5}$)

Пространственную скорость звезды относительно Солнца определяем по формуле $v = \sqrt{v_\tau^2 + v_r^2}$.

Тангенциальная скорость:

$$v_\tau = 4.74 \frac{\mu}{\pi''} = 4.74 \frac{\sqrt{(15\mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2}}{\pi''} = 4.74 \frac{\sqrt{(15 \times 0.0172 \cos 38^\circ 47' 24'')^2 + 0.288^2}}{0.129} = 12.91 \text{ (км/с)}$$

Радиальная скорость:

$$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = -4.60 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^5 = -13.80 \text{ (км/с)}$$

Окончательно имеем $v = \sqrt{12.91^2 + (-13.80)^2} = 18.90 \text{ км/с}$.

Ответ: $v = 18.90 \text{ км/с}$.

12. Найдите радиус ε Ориона (Alnilam) ($\pi'' = 0.0024''$, $d'' = 0.00072''$) в радиусах Солнца.

Радиус звезды в радиусах Солнца находим по формуле:

$$R = \frac{215d''}{2\pi''} = \frac{215 \times 0.00072}{2 \times 0.0024} = 32.$$

Ответ: 32 радиуса Солнца.

13. Оцените массу внутренней части Галактики. Галактический год примите равным 250 млн лет, а расстояние до центра Галактики от Солнца 10 кпк.

Для оценки внутренней части Галактики воспользуемся формулой:

$$M = \frac{v^2 R}{G} = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (10000 \times 149600000000 \times 206265)^3}{6.67 \times 10^{-11} (250000000 \times 365.26 \times 86400)^2} = 2.79 \times 10^{41} \text{ (кг)}.$$

Ответ: $M = 2.79 \times 10^{41} \text{ (кг)} = 140 \text{ млрд масс Солнца}$.

14. Найдите расстояние до квазара, красное смещение спектра которого $z = 1$. Выразите его в световых годах.

Расстояние до квазара находим из закона красного смещения Хаббла $r = \frac{v}{H}$.

Скорость находим по формуле:

$$v = c \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2} = 3.00 \times 10^5 \times \frac{3}{5} = 180000 \text{ (км/с)}.$$

Отсюда:

$$r = \frac{180000}{75} = 2400 \text{ (Мпс)} = 7824000000 \text{ св. лет}.$$

Ответ: $r = 7824000000 \text{ св. лет}$.

15. Оцените величину критической плотности Вселенной.

Для оценки критической плотности Вселенной воспользуемся формулой:

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3 \times 75^2}{(10^6 \times 1.496 \times 10^{11} \times 206265)^2 \times 8\pi \times 6.67 \times 10^{-11}} = 1.06 \times 10^{-26} \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

Ответ: $\rho_{\text{кр}} = 1.06 \times 10^{-26} \text{ кг/м}^3$.

Длинная задача (30 баллов)

Час быка

В одноименном научно-фантастическом романе И.Ефремова описана планета Торманс. Физические условия на ней (солнечная постоянная, размеры, масса) равны земным. В то же время, ось вращения лежит в плоскости орбиты, период вращения вокруг нее равен 22 земным часам, а тормансианский звездный год в четыре раза меньше земного звездного (365.26 суток). Луна Торманса (Т-Луна) движется по экваториальной орбите, радиус которой составляет 45% от большой полуоси орбиты Луны. Все движения круговые, небесные тела сферически симметричны. Звезду, вокруг которой обращается Торманс, назовем Т-солнце.

Задачу решаем с точки зрения жителей Торманса, которые (в романе они потомки землян) сохранили земные единицы времени.

1. Как изменяются эклиптические координаты Т-солнца в течение года? (Любителей творчества И.Ефремова огорчим: в романе есть астрономическая неточность).

В романе неверно указано, что "ось вращения однозначна с линией орбиты то есть она по непонятной причине поворачивается (прецессия вследствие сферической симметрии тел отсутствует).

Поскольку прецессия отсутствует, то ось вращения Торманса, а, следовательно, и ось мира сохраняют свое направление в пространстве. Поэтому, плоскость эклиптики перпендикулярна плоскости небесного экватора. Аналогично Земле, точка весеннего равноденствия – это точка, в которой Т-солнце, двигаясь по эклиптике, переходит из южной части небесной сферы в северную часть. В этот момент Торманс движется по орбите южным полюсом вперед и начинается астрономическая весна. Эклиптическую долготу отсчитываем в сторону движения Т-солнца по небесной сфере. Она равномерно увеличивается от $\lambda = 0^\circ$ до $\lambda = 360^\circ$. Эклиптическая широта Т-солнца в рамках приближений условия остается равной $\beta = 0^\circ$.

Ответ: эклиптическая долгота равномерно увеличивается от $\lambda = 0^\circ$ до $\lambda = 360^\circ$, эклиптическая широта остается равной $\beta = 0^\circ$.

2. Как изменяются экваториальные координаты Т-солнца в течение года?

Поскольку тормансианские сутки составляют 22^h , то $360^\circ = 22^h$.

Во время астрономической весны склонение Т-солнца увеличивается от $\delta = 0^\circ$ до $\delta = 90^\circ$, а прямое восхождение остается постоянным $\alpha = 0^h$.

Во время астрономического лета и осени склонение уменьшается от $\delta = 90^\circ$ до $\delta = -90^\circ$, а прямое восхождение остается постоянным $\alpha = 11^h$.

Во время астрономической зимы склонение увеличивается от $\delta = -90^\circ$ до $\delta = 0^\circ$, а прямое восхождение остается постоянным $\alpha = 0^h$.

Ответ: весна: $\delta = [0; 90^\circ]$, $\alpha = 0^h$; лето: $\delta = [90^\circ; 0^\circ]$, $\alpha = 11^h$; осень: $\delta = [0^\circ; -90^\circ]$, $\alpha = 11^h$; зима: $\delta = [-90^\circ; 0^\circ]$, $\alpha = 0^h$.

3. Чему равна продолжительность Т-звездных суток?

Продолжительность звездных суток Торманса равна периоду обращения его вокруг своей оси, то есть 22 часа.

Ответ: 22 часа.

4. Определите Т-уравнение времени.

Поскольку эклиптика перпендикулярна небесному экватору, то при движении Т-солнца между точками солнцестояний его прямое восхождение не изменяется, а при прохождении этих точек скачком изменяется на $\alpha = 11^h$, среднее же солнечное время должно изменяться равномерно, причем величина среднего солнечного времени должна лежать в интервале $[0; 22^h]$, поэтому:

Во время астрономической зимы и весны $\eta = 0$.

Во время астрономического лета и осени $\eta = \pm 11^h$.

Ответ: зима-весна: $\eta = 0$, лето-осень: $\eta = \pm 11^h$.

5. Опишите изменение продолжительности Т-истинных и средних солнечных суток.

По причине, указанной в пункте 4. продолжительность истинных солнечных суток в течение

года не изменяется, за исключением моментов прохождения Т-солнцем точек солнцестояний. Соответствующие Т-истинные солнечные сутки могут иметь продолжительность 11 часов или 33 часа. Причем, для диаметрально противоположных меридианов поверхности Торманса, сумма продолжительности Т-истинных солнечных суток всегда равна 44^ч.

Средние солнечные сутки потому и средние, что их продолжительность в течение года постоянна. На Тормансе 22^ч.

Ответ: Т-истинные солнечные сутки (22^ч, 11^ч, 33^ч), Т-средние солнечные сутки 22^ч.

6. *Оцените продолжительность Т-сароса.*

Найдем сидерический Т-месяц по формуле:

$$T_{\text{Т-луны}} = \left(\frac{a_{\text{Т-луны}}}{a_{\text{Л}}} \right)^{\frac{3}{2}} T_{\text{Л}} = 0.45^{\frac{3}{2}} \times 27.32 \times \frac{24}{22} = 9.00 \text{ (ср. солн. Т-суток)}.$$

Т-полнолуние происходит тогда, когда Т-Луна находится в плоскости эклиптики. В течение сидерического Т-месяца Т-Луна оказывается в плоскости эклиптики дважды. Поэтому, синодический Т-месяц равен сидерическому Т-месяцу (у точек Т-солнцестояний может быть вдвое меньше).

Поскольку все тела сферически симметричны, движения линии узлов нет и драконический Т-месяц также равен сидерическому Т-месяцу, а драконический Т-год равен звездному Т-году, продолжительность которого рассчитаем по формуле:

$$T_T = \frac{T}{4} = \frac{365.26}{4} \times \frac{24}{22} = 99.616 \text{ (ср. солн. Т-суток)}.$$

Таким образом, находим сарос как наименьшее общее кратное только от двух величин: продолжительности синодического (драконического) Т-месяца (9.00 ср. солн. Т-суток) и драконического Т-года. Это НОК определяем по совпадению целого числа дней, поэтому продолжительность сароса равна продолжительности двух звездных лет и составляет 199.232 ср. солн. Т-суток, включая 2 драконических года или 20 синодических (драконических) месяцев.

Ответ: 199.232 ср. солн. Т-суток.

7. *Предложите Т-солнечный календарь с минимальным циклом, точностью превышающий юлианский.*

Так как прецессия отсутствует, продолжительность тропического Т-года равна 99.616 ср. солн. Т-суток.

В календарном году число суток должно быть целым.

Предлагаем, каждые 13 лет добавлять по 8 "лишних" дней. Средняя продолжительность года такого календаря составит:

$$T = \frac{99 \times 13 + 8}{13} = 99.615 \text{ (ср. солн. Т-суток)}.$$

Расхождение в одни Тормансианские сутки "набежит" за 1000 тормансианских лет (250 земных), что превышает точность юлианского календаря почти вдвое.

Ответ: цикл календаря 13 лет: 12 лет по 99 суток, объединенных в 10 месяцев, в тринадцатом году дополнительный месяц, продолжительностью 8 суток.

8. *Определите массу Т-солнца.*

Поскольку физические условия Торманса соответствуют земным, то солнечная постоянная в обоих случаях одинакова:

$$\frac{L_C}{L_{TC}} = \frac{a_3^2}{a_T^2}.$$

Полагаем, что Т-Солнце находится на главной последовательности (в противном случае физические условия Торманса будут резко отличаться от земных) и используем соотношение светимость-масса:

$$\frac{L_C}{L_{TC}} = \left(\frac{m_C}{m_{TC}} \right)^{3.9}.$$

Используем третий закон Кеплера:

$$\left(\frac{T_3}{T_T}\right)^2 \frac{m_C}{m_{TC}} = \left(\frac{a_3}{a_T}\right)^3.$$

Решая систему данных уравнений относительно m_{TC} , получим:

$$\left(\frac{T_3}{T_T}\right)^2 \frac{m_C}{m_{TC}} = \left(\frac{m_C}{m_{TC}}\right)^{\frac{3 \times 3.9}{2}} \Rightarrow \left(\frac{T_3}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{m_C}{m_{TC}}\right)^{4.85},$$

$$m_T = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{4.85}} m_C = 0.565 m_C = 0.565 \times 1.99 \times 10^{30} = 1.12 \times 10^{30} \text{ (кг)}.$$

Ответ: $m = 0.565 m_C = 1.12 \times 10^{30}$ кг.

9. Чему равен радиус Т-солнца?

Для определения радиуса Т-солнца используем соотношение светимость-радиус-масса:

$$\frac{L_C}{L_{TC}} = \left(\frac{R_C}{R_{TC}}\right)^{5.2} = \left(\frac{m_C}{m_{TC}}\right)^{3.9}.$$

Отсюда:

$$R_{TC} = \left(\frac{m_{TC}}{m_C}\right)^{\frac{3.9}{5.2}} R_C = 0.565^{\frac{3.9}{5.2}} R_C = 0.652 R_C = 0.652 \times 696000 = 454000 \text{ (км)}.$$

Ответ: $R_{TC} = 0.652 R_C = 454000$ км.

10. Рассчитайте горизонтальный параллакс Т-солнца.

Вначале найдем длину большой полуоси Торманса:

$$\left(\frac{T_3}{T_T}\right)^2 \frac{m_C}{m_{TC}} = \left(\frac{a_3}{a_T}\right)^3 \Rightarrow a_T = \left(\frac{T_T}{T_3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{m_{TC}}{m_C}\right)^{\frac{1}{3}} a_C,$$

$$a_T = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \times 0.565^{\frac{1}{3}} a_C = 0.328 a_C = 0.328 \times 1.496 \times 10^8 = 4.91 \times 10^7 \text{ (км)}.$$

Горизонтальный параллакс Т-солнца определяем по формуле:

$$p_0'' = \frac{R_T}{a_T} 206265 = \frac{6371}{4.91 \times 10^7} \times 206265 = 26.8''.$$

Ответ: горизонтальный параллакс Торманса $p_0'' = 26.8''$.

11. Найдите величину постоянной годичной Т-абберации.

Т-постоянную годичной абберации находим по формуле:

$$\sigma'' = \frac{v_T}{c} 206265 = \frac{2\pi a_T}{T_{TC}} 206265 = \frac{2\pi \times 4.91 \times 10^7}{99.615 \times 22 \times 86400 \times 3.00 \times 10^8} 206265 = 24.6''.$$

Ответ: постоянная годичной абберации равна $\sigma'' = 24.6''$.

12. Рассчитайте светимость Т-солнца в светимостях Солнца.

Светимость Т-солнца рассчитываем по формуле:

$$L_{TC} = \left(\frac{R_{TC}}{R_C}\right)^{5.2} = \left(\frac{m_{TC}}{m_C}\right)^{3.9} = 0.652^{5.2} = 0.565^{3.9} = 0.108.$$

Ответ: светимость Т-солнца равна 0.108 светимостей Солнца.

13. Какова видимая звездная величина Т-солнца?

Найдем абсолютную звездную величину Т-солнца: $M = 4.8 - 2.5 \lg L = 4.8 - 2.5 \lg 0.108 = 7.216$. Выразим большую полуось Торманса в парсеках:

$$a_T = 0.327 \text{ а.е.} = \frac{0.327}{206265} = 1.585 \times 10^{-6} \text{ (пк)}.$$

Используем формулу $M = m + 5 - 5 \lg r$.

Отсюда $m = M - 5 + 5 \lg r = 7.216 - 5 + 5 \lg (1.585 \times 10^{-6}) = -26.8$. Она равна видимой звездной величине Солнца, так как величина солнечной постоянной для Земли и Торманса одинакова.

Ответ: $m = -26.8$.

14. Во сколько раз эффективная температура фотосферы Т-солнца меньше эффективной температуры Солнца?

Эффективную температуру Т-солнца находим из соотношения:

$$\frac{L_{TC}}{L_C} = \left(\frac{R_{TC}}{R_C} \right)^2 \left(\frac{T_{TC_{эфф}}}{T_{C_{эфф}}} \right)^4.$$

Отсюда:

$$T_{TC_{эфф}} = 0.652^{-\frac{1}{2}} \times 0.108^{\frac{1}{4}} = 0.710 T_{C_{эфф}} \Rightarrow \frac{T_{C_{эфф}}}{T_{TC_{эфф}}} = \frac{1}{0.710} = 1.41.$$

Ответ: в 1.41 раз меньше.

15. Чему равно время пребывания Т-солнца в спектральном классе V?

Время пребывания звезды на главной последовательности определяет соотношение:

$$t = \frac{10^{10}}{\left(\frac{m_{TC}}{m_C} \right)^3} = \frac{10^{10}}{0.565^3} = 5.54 \times 10^{10} \text{ (лет)} = 55.4 \text{ млрд лет.}$$

Вопросы космологии в этой задаче не обсуждаем.

Ответ: $t = 5.54 \times 10^{10}$ лет = 55.4 млрд лет.

Схема оценивания:

Каждый пункт длинной задачи и каждая короткая задача оценивается в **2 балла**.

Ответа нет — **-1 балл**.

Решения нет — **-1 балл**.

Ошибка в вычислениях — **-0.4 балла**.

Неправильная размерность результата — **-0.4 балла**.

Неверное число значащих цифр — **-0.4 балла**.