Заключительный этап

XVI Республиканской олимпиады по астрономии

Решения и схема оценивания заданий теоретического тура

29 марта - 2 апреля 2010 года

Короткие задачи

1. *Учитывая изменение со временем масштабного фактора $a(t)$, определите расстояние в световых годах, которое фотон может пройти от момента Большого Взрыва до настоящего момента. Возраст Вселенной T составляет 13.7 млрд. лет, среднее за данный период значение величины обратной масштабному фактору $\langle 1/a(t) \rangle = 3.4$.*

   Фотон, движущийся в расширяющейся Вселенной, за малый промежуток времени Δt пройдет расстояние $a(t)\Delta x$, где x — сопутствующая координата. Т. е.

   $$c\Delta t = a(t)\Delta x \implies \Delta x = \frac{1}{a(t)} \times c\Delta t.$$

   Если мы заменим величину $1/a(t)$ ее средним значением, то последняя формула станет справедливой и для больших промежутков времени, поэтому

   $$x = \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle cT = 3.4cT,$$

   а искомое расстояние

   $$D = 3.4a(T)cT = 3.4cT = 3.4 \times 13.7 \text{ млрд. св. лет} = 47 \text{ млрд. св. лет}.$$

2. *Наблюдатели каких географических широт могут видеть на небе звезду Канопус (без учета рефракции), склонение которой $\delta = -52°42'$?*

   Звезда будет наблюдаться на широтах $-90° \le \varphi < (90° - 52°42')$, т. е. $-90° \le \varphi < 37°18'$.

3. *Каковы будут показания часов жителя Буэнос Айреса (−3-й часовой пояс) 26 мая 2010 года, если на Ваших часах в Минске в этот день 14:30?*

   В Минске в это время действует летнее время, в Буэнос Айресе — поясное, поэтому показания часов будут равны:

   $$14^h30^m - 6^h = 8^h30^m.$$

4. *30 марта 2010 года в начале данного тура олимпиады (9:00 по минскому летнему времени) склонение Солнца $\delta_\odot = +3°43'$. Пренебрегая угловыми размерами Солнца и уравнением времени, вычислите координаты точки на поверхности Земли, где в данный момент времени оно будет наблюдаться в зените.*

   Широта составляет $\varphi = 3°43'$. Долгота равна $\lambda = 6^h00^m$.

5. *Пренебрегая угловыми размерами Солнца, рефракцией и неравномерностью истинных солнечных суток, определите географическую широту в северном полушарии, на которой 30 марта 2010 года продолжительность дня является самой короткой.*

   Не учитывая околополярнй арктический регион (там в период олимпиады полярный день), продолжительность дня в северном полушарии уменьшается с уменьшением широты и является самой короткой на экваторе (12 часов). Следовательно, искомая широта $\varphi \longrightarrow 0°$.

6. *Какая доля начальной массы звезды должна быть сброшена в пространство после стадии красного гиганта, чтобы орбиты тел в планетной системе остались замкнутыми? Начальные орбиты тел считайте круговыми.*

   Круговые скорости тел планетной системы станут параболическими при уменьшении массы звезды в 2 раза, поэтому

$$\frac{\Delta M}{M_0} < \frac{1}{2}.$$

7. *Чему равен радиус кривизны параболический орбиты кометы в перигелии на расстоянии 1 а. е. от Солнца?*

   Найдем радиус кривизны R с помощью выражения для центростремительного ускорения:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{r_0^2},$$

   где v — скорость кометы в перигелии, M —масса Солнца, r_0 — расстояние в перигелии. Подставляя $v = \sqrt{2GM/r_0}$, получим

$$R = 2r_0 = 2 \text{ а. е.}$$

8. *Вычислите значение фазы Луны через 17 дней после новолуния, считая, что ее движение происходит с постоянной угловой скоростью.*

   Через 17 дней после новолуния фазовый угол Луны составит:

$$\varphi = 2\pi \frac{17}{29.5} = 207.5°.$$

   Поэтому фаза

$$\Phi = \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0.94.$$

9. *Экваториальные координаты звезд двойной звездной системы* ϵ *Лиры составляют:* $\alpha_1 = 18^h 44^m 41^s$, $\delta_1 = +39°40'52''$ *и* $\alpha_2 = 18^h 44^m 43^s$, $\delta_2 = +39°37'26''$. *Вычислите угловое расстояние между компонентами в угловых секундах.*

   Разности координат звезд равны:

$$\Delta\alpha = 2^s = 30'' \text{ и } \Delta\delta = 3'26'' = 206''.$$

   Среднее склонение $\langle\delta\rangle = +39°39'09''$. Угловое расстояние между звездами:

$$\xi = \sqrt{(\Delta\alpha \cos\langle\delta\rangle)^2 + (\Delta\delta)^2} = 207.3''.$$

10. *Галактики, находящиеся в противоположных точках небесной сферы, имеют красные смещения* $z_1 = 0.50$ *и* $z_2 = 0.60$. *Чему равна относительная скорость их удаления в единицах скорости света?*

    Скорость первой галактики относительно нас, $u_1 = 0.385$, скорость второй, $u_2 = 0.438$. Применяя формулу сложения скоростей в СТО, получим:

$$u_{rel} = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2} = 0.70.$$

    Простое сложение скоростей, $u = u_1 + u_2$, приводит к неверному результату $u = 0.82$.

11. *Докажите, что при слиянии двух черных дыр сумма площадей их горизонтов событий не превышает площадь горизонта событий получившейся черной дыры.*

Площадь горизонта событий черной дыры:

$$S = 4\pi R_g^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2.$$

При слиянии двух черных дыр:

$$S = \frac{16\pi G^2}{c^4} \left(M_1 + M_2\right)^2.$$

Для отдельных черных дыр:

$$S_1 + S_2 = \frac{16\pi G^2}{c^4} \left(M_1^2 + M_2^2\right).$$

Сравнивая правые части, убеждаемся, что

$$\left(M_1 + M_2\right)^2 \geq M_1^2 + M_2^2,$$

следовательно

$$S \geq S_1 + S_2.$$

12. *С какой скоростью (в атомах на кубический парсек в секунду) должен в расширяющейся Вселенной появляться водород, чтобы ее средняя плотность ($\rho = 1 \times 10^{-28}$ кг/м^3) оставалась неизменной?*

Рассмотрим расширение куба со стороной L. За время Δt каждая из сторон расширится на величину $LH\Delta t$. Новый объем будет равен

$$\left(L + LH\Delta t\right)^3 \simeq L^3 + 3L^3 H\Delta t.$$

Таким образом, скорость увеличения любого объема V:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 3HV.$$

Если материя не создается, то скорость изменения плотности ρ,

$$-\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = 3H\rho,$$

поскольку $\rho \propto 1/V$. Чтобы плотность оставалась постоянной, материя должна создаваться со скоростью $3H\rho$. Пусть m_H — масса атома водорода, тогда

$$\frac{3H\rho}{m_H} \simeq 1 \times 10^{31} \text{ атомов пк}^{-3}\text{с}^{-1}.$$

Гало темной материи

(a) *Кратко (одним предложением) объясните физический смысл величины A.*

Величина A — это плотность темной материи при $r = r_s$.

(b) Н*айдите массу темной материи внутри радиуса R.*

Рассмотрим сферический слой толщиной Δr на расстоянии r от центра галактики. Масса этого слоя,

$$\Delta M = \rho(r) 4\pi r^2 \Delta r = 4\pi A r_s r \Delta r.$$

Легко заметить, что функция $4\pi A r_s r$ — линейная относительно радиальной координаты. Принимая во внимание, что полная масса темной материи внутри радиуса R будет вычисляться как площадь под графиком данной функции на промежутке от 0 до R, полная масса,

$$M = 2\pi A r_s R^2.$$

(c) *Найдите величину r_{200}, выразив ее через параметр Хаббла H, гравитационную постоянную G и величины A и r_s.*

По определению вириального радиуса:

$$\rho(r_{200}) = 200\rho_{crit} \implies \frac{A}{r/r_s} = 200\rho_{crit},$$

где ρ_{crit} — критическая плотность Вселенной, выражающаяся формулой:

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Подставляя данное выражение в формулу выше, получим:

$$r_{200} = r_s \frac{A}{200\rho_{crit}} = r_s \frac{\pi G A}{75 H^2}.$$

(d) *Рассчитайте величину r_{200} (в кпк) для галактики с массой темной материи $M = 10^{12} M_\odot$ внутри данного радиуса.*

Сначала с помощью нормировки найдем неизвестные величины r_s и A:

$$M(r_{200}) = 2\pi A r_s r_{200}^2 = M \implies A r_s = \frac{M}{2\pi r_{200}^2}.$$

Подставляя полученное выражение в конечную формулу предыдущего вопроса, получим:

$$r_{200} = \left(\frac{GM}{150H^2}\right)^{1/3} = 179 \text{ кпк}.$$

СХЕМА ОЦЕНИВАНИЯ

1. **Каждая короткая задача и каждый вопрос длинной задачи: 5 баллов.**
2. **Если решение есть, но ответ неверен: 2 балла.**
3. **Если ответ верен, но решение отсутствует: 2 балла.**
4. **Если в ответе неверно указана размерность : –1 балл.**
5. **Неверное число значащих цифр в ответе: –1 балл.**

Максимально возможное количество баллов за задания теоретического тура: 80.