Заключительный этап
XVII Республиканской олимпиады по астрономии

Решения и схема оценивания заданий теоретического тура

22 марта 2011 года

1. КОРОТКИЕ ЗАДАЧИ

1.1 Очевидно, что Вы находитесь в северном полушарии. Широта $= 90^\circ - 20^\circ - 53^\circ = 17^\circ$.

1.2 Православное Рождество празднуется каждый год 25 декабря по юлианскому календарю. Чтобы оно попало на 29 февраля по григорианскому календарю, разница между календарями должна составлять 66 дней. То есть на 53 дня больше, чем сейчас. За каждые 400 лет набегает 3 дня. Тогда через 6800 лет (в 8800 году) будет 64 дня разницы, 5 мая 8900 года она увеличится до 65 дней, а 6 мая 9000 года — до 66 дней. Ближайшим високосным годом будет 9004 год. Именно 29 февраля 9004 года будут праздновать Рождество (25 декабря 9003 года по юлианскому календарю). Отметим, что в это столетие Рождество будет праздноваться в разные дни — в високосные годы 29 февраля, в остальные — 1 марта.

1.3 Так как Меркурий и Венера вращаются с разными угловыми скоростями, то через некоторое время Солнце, Меркурий и Венера окажутся на одной прямой. После этого угол Меркурий-Солнце-Венера будет непрерывно возрастать до 360° до момента следующего такого же расположения на одной прямой. Таким образом, этот угол может принимать любое значение, в том числе он может быть тупым. Поместим теперь Землю на место Солнца. Из многолетних наблюдений можно сделать вывод, что угол Меркурий-Земля-Венера всегда острый, то есть не может быть тупым. Это противоречие опровергает геоцентрическую систему мира.

Примечание. Аналогичные рассуждение верны и для пространственного случая (орбиты планет находятся в различных плоскостях).

1.4 Пусть P — продолжительность солнечных суток, T_A и T_S — периоды вращения вокруг оси и звезды соответственно, тогда:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T_A} + \frac{1}{T_S} \implies P = \frac{T_S T_A}{T_S + T_A} = \frac{50 \times 25}{50 + 25} \text{ суток} \simeq 16.66667 \text{ суток} \simeq 17 \text{ суток.}$$

1.5 Средняя плотность Земли (M — масса Земли, R — ее радиус):

$$\langle \rho \rangle = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Откуда следует:

$$\langle \rho \rangle R^3 = \rho_{core} R_{core}^3 + (R^3 - R_{core}^3)\rho_{rock}.$$

С помощью несложных преобразований получим:

$$\frac{R_{core}}{R} = \left(\frac{\langle\rho\rangle - \rho_{rock}}{\rho_{core} - \rho_{rock}}\right)^{1/3} = \left(\frac{5.5 - 3.0}{7.9 - 3.0}\right)^{1/3} \simeq 0.80.$$

1.6 Описанный ниже метод является решения не единственно возможным. Воспользуемся уравнением конического сечения в полярных координатах с центром в фокусе:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

где r — радиус-вектор, p — орбитальный параметр, θ — истинная аномалия. Очевидно, что

$$r \longrightarrow \infty \text{ при } \theta \longrightarrow \theta_{\max}, \text{ т. е.}$$

$$1 + e\cos\theta_{\max} = 0, \text{ откуда}$$

$$\cos\theta_{\max} = -\frac{1}{e} \text{ и } \theta_{\max} = 131.8^\circ \simeq 130^\circ.$$

1.7 Будем считать, что уменьшение потока происходит пропорционально площади диска Солнца, закрытой планетами. Чтобы найти максимальное значение, предположим, что все планеты одновременно прошли по диску Солнца, не перекрывая друг друга. Так как наблюдения проводятся с далекой звезды, что отношение видимых угловых диаметров планет и Солнца равно отношению их радиусов. Тогда искомое значение равно

$$\frac{\sum\limits_{\text{по всем планетам}} R^2_{\text{планеты}}}{R^2_\odot} = 0.0208 \simeq 2\%$$

1.8 Светимость звезды можно рассчитать по формуле:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Изменив светимость и радиус, получим:

$$2L = 4\pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2 \sigma T^4_{new}$$

Тогда

$$\frac{T_{new}}{T} = \sqrt[4]{\frac{2L}{L}\frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{9}{2}} \simeq 1.456.$$

1.9 Пусть m — суммарная звездная величина, F — суммарный поток. Тогда с помощью формулы Погсона получим:

$$m - m_A = -2.5\lg\frac{F}{F_A} = -2.5\lg\left(\frac{F_A + F_B + F_C}{F_A}\right) = -2.5\lg\left(1 + \frac{F_B}{F_A} + \frac{F_C}{F_A}\right).$$

Однако

$$\frac{F_B}{F_A} = 10^{0.4(m_A - m_B)} \text{ и } \frac{F_C}{F_A} = 10^{0.4(m_A - m_C)}.$$

Следовательно,

$$m = m_A - 2.5\lg\left[1 + 10^{0.4(m_A - m_B)} + 10^{0.4(m_A - m_C)}\right] = 4.3 - 0.0358 \simeq 4.264 \simeq 4.3.$$

1.10 Применяя закон смещения Вина, получим:

$$\lambda_m = \frac{2.8977685 \times 10^6 \text{ нм·K}}{8770 \text{ K}} = 330.4 \text{ нм}.$$

2. ЖЕЛТЫЕ КАРЛИКИ

(a) На каждом цикле доля газа f превращается в звезды, поэтому после N таких циклов масса оставшегося газа
$$M(N) = (1-f)^N M_0.$$

(b) Полная масса карликов, образованных за N циклов
$$M_d(N) = f_d\left[M_0 - M(N)\right] = f_d\left[1-(1-f)^N\right]M_0.$$

(c) Пусть после каждого шага N масса металлов в газе $M_Z(N)$, тогда
$$M_Z(N+1) = (1-f)M_Z(N) + yfM(N) = (1-f)M_Z(N) + yf(1-f)^N M_0.$$

Для нахождения $M_Z(N+1)$ запишем следующую последовательность уравнений:
$$M_Z(N+1) = (1-f)M_Z(N) + yf(1-f)^N M_0$$
$$M_Z(N) = (1-f)M_Z(N-1) + yf(1-f)^{N-1} M_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M_Z(2) = (1-f)M_Z(1) + yf(1-f)M_0$$
$$M_Z(1) = 0 + yfM_0.$$

Здесь мы использовали $M_Z(0) = 0$. Решить данную последовательность уравнений можно двумя способами: применяя последовательную подстановку или умножая данные уравнения на 1, $(1-f)$, …, $(1-f)^N$ соответственно с последующим сложением. Получим:
$$M_Z(N) = Nyf(1-f)^{N-1}M_0.$$

(d) Металличность
$$Z_N = \frac{M_Z(N)}{M(N)} = \frac{Nyf(1-f)^{N-1}M_0}{(1-f)^N M_0} = Ny\frac{f}{1-f}.$$

(e) Воспользуемся выражением из первого вопроса задачи и возьмем логарифм правой и левой частей:
$$N\ln(1-f) = \ln\left(\frac{M(N)}{M_0}\right).$$

Имеем
$$Z_N = y\frac{f}{(1-f)\ln(1-f)}\ln\left(\frac{M(N)}{M_0}\right).$$

Поскольку $f \ll 1$: $1-f \sim 1$, $\ln(1-f) \sim -f$. Тогда
$$Z = y\ln\left(\frac{M_0}{M}\right).$$

(f) Металличность $Z_1 = 0.02$, т. е.
$$y\ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right) = 0.02.$$

Поскольку $M_1/M_0 = 0.1$, имеем $y = 0.02/\ln 10 \simeq 0.00869$. Масса карликовых звезд
$$M_{d1} = f_d(M_0 - M_1) = f_d M_0\left(1 - \frac{M_1}{M_0}\right) = 0.9 f_d M_0.$$

Для звезд с металличностью $Z_2 = Z_1/4 = 0.005$:

$$\ln\left(\frac{M_2}{M_0}\right) = -\frac{Z_2}{y} = -0.576 \text{ или}$$

$$\frac{M_2}{M_0} = 0.562.$$

Тогда

$$M_{d2} = f_d M_0 \left(1 - \frac{M_2}{M_0}\right) = 0.438 f_d M_0 \text{ и}$$

$$\frac{M_{d2}}{M_{d1}} = 0.486.$$

3. ТЯЖЕЛАЯ ЭПОХА ВСЕЛЕННОЙ

(a) Время, прошедшее с начала расширения Вселенной

$$t = \frac{1}{H}. \tag{1}$$

Эффективная массовая плотность излучения с учетом закона Стефана-Больцмана

$$\varrho = (E/V)/c^2 = \frac{4\sigma}{c^3} T^4. \tag{2}$$

Подставляя данные выражения в первую формулу из условия, получаем

$$\frac{1}{t^2} = \frac{32\pi G\sigma}{3c^3} T^4, \tag{3}$$

или же

$$T = \left(\frac{3c^3}{32\pi G\sigma}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}} \simeq \frac{10^{10}}{\sqrt{t}}, \tag{4}$$

где температура выражена в Кельвинах, а время — в секундах.

(b) Температура, при которой рождаются протоны

$$T = \frac{m_p c^2}{k} \simeq 10^{13} \text{ К}. \tag{5}$$

Тогда из (4) получаем оценку начала адронной эпохи

$$t \simeq \frac{10^{20}}{T^2} \simeq 10^{-6} \text{ с}. \tag{6}$$

(c) При аннигиляции частицы и античастицы рождается пара гамма-квантов с длиной волны

$$\lambda = \frac{hc}{m_p c^2} \simeq 10^{-15} \text{ м}. \tag{7}$$

(d) При тепловом равновесии считаем энергию частиц $\sim kT$. Тогда при искомой температуре эта энергия должна быть равна электростатической энергии взаимодействия двух протонов на расстоянии r_s

$$T = \frac{1}{k}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_s} \simeq 10^9 \text{ К}, \tag{8}$$

следовательно тепловой энергии протонов в адронную эпоху достаточно для преодоления электростатического барьера отталкивания.

(e) Энергию равновесных фотонов можно рассчитать с использованием их длины волны, полученной в пункте (c), либо отметить, что она совпадает с энергией покоя протонов

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = m_p c^2 \simeq 0.9 \text{ ГэВ}. \tag{9}$$

Энергия свези протона и нейтрона в ядре дейтерия рассчитывается из дефекта масс

$$E_{\text{св}} = (m_p + m_n - m_D)c^2 \simeq 1.7 \text{ МэВ}. \tag{10}$$

Сравнение данных результатов показывает, что нуклеосинтез в адронную эпоху невозможен, так как энергия излучения многократно превышает энергию связи нуклонов и такие жесткие гамма-кванты мгновенно разрушат образующиеся ядра.

Схема оценивания

1. Короткие задачи (50 баллов)

- Каждая задача: 5 баллов
- Если решение задачи есть, но ответ неверен: 2 балла
- Если в ответе задачи неверно указана размерность: −1 балл
- Неверное число значащих цифр в ответе задачи: −1 балл

2. Желтые карлики (25 баллов)

(a) 4 балла

(b) 3 балла

(c) 6 баллов

(d) 2 балла

(e) 4 балла

(f) 6 баллов

3. Тяжелая эпоха Вселенной (25 баллов)

- Каждый вопрос задачи: 5 баллов

Всего за теоретический тур: 100 баллов