

❖ Белорусские астрономические олимпиады ❖

Задания для заключительного этапа
XVIII Республиканской олимпиады по
астрономии

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

20 марта 2012 года



Короткие задачи

1. Какой высоты антенну надо установить на полюсе сферической Земли ($R = 6371$ км, $M = 5.97 \times 10^{24}$ кг), чтобы принять прямой сигнал геостационарного спутника?
2. Каково минимальное число спутников должен «видеть» GPS навигатор для определения положения точки на поверхности Земли относительно геоида? *Ответ обязательно поясните!*
3. При какой разности гелиоцентрических долгот Земли и Марса он меняет свое движение с прямого на попятное? Рассмотрите приближение круговых орбит, лежащих в одной плоскости. Радиус орбиты Марса $a_M = 1.52$ а. е.
4. Найдите полуоси aberrационного эллипса звезды, экваториальные координаты которой $\alpha = 6^h 00^m$, $\delta = 23^\circ 26'$.
5. Близкая звезда, находящаяся в направлении апекса Солнца, имеет относительно него скорость -16.5 км/с. С какой скоростью она движется относительно соседних звезд?
6. Телескоп имеет диаметр объектива 120 мм. Оцените его наименьшее полезное увеличение. Диаметр зрачка Вашего глаза в темноте вспомните самостоятельно.
7. Во сколько раз радиус одной звезды больше радиуса второй, если максимумы в их спектрах излучения отличаются на 20%, а светимости — в 20 раз? Рассмотрите приближение абсолютно черного тела.
8. На каком расстоянии Сириус ($m = -1.45$, $r = 8.60$ св. лет) имеет такую же видимую звездную величину, что и Солнце на расстоянии 20 пк?
9. В рамках модели однородной изотропной Вселенной оцените значение ее критической плотности.
10. Сверхмассивная черная дыра массой $1 \times 10^6 M_\odot$ поглощает окружающее вещество с постоянной скоростью $0.5 M_\odot/\text{год}$. Сравните время, за которое черная дыра увеличит свою массу вдвое, с хаббловским возрастом Вселенной.
11. В момент летнего солнцестояния 20 июня 2012 года в 23h05m UTC, звезда, находящаяся в противостоянии с Солнцем, в южном полушарии Земли находится в зените. Ее высота в течение суток в данном месте лежит в интервале от 0 до 90 градусов. Пренебрегая рефракцией и уравнением времени, определите эклиптические координаты звезды. *Подсказка: в противостоянии эклиптическая долгота небесного тела и Солнца отличаются на 180 градусов, aberrацией пренебречь.*

Звезда главной последовательности

Некоторая звезда находится на главной последовательности. Эффективная температура ее поверхности $T = 10000$ К. Оцените ее радиус и массу (в единицах Солнца), абсолютную звездную величину и полное время нахождения на главной последовательности (в годах). Подсказка: при решении используйте известные статистические зависимости для звезд главной последовательности $L \propto m^{3.9}$, $L \propto R^{5.2}$; время жизни на главной последовательности $\tau \simeq 10^{10} (M/M_\odot) \cdot (L_\odot/L)$ лет. Температура Солнца $T_\odot = 5780$ К.

Полет к Луне

В данной задаче Вам предстоит выполнить расчет траектории полета к Луне, включающей старт с круговой орбиты вокруг Земли, облет Луны и возвращение на Землю. Подобные задачи решались инженерами NASA при подготовке и управлении полетами космических аппаратов «Аполлон».

Будем считать, что космический аппарат движется под действием силы тяжести Земли до попадания в сферу гравитационного действия Луны (ее радиус $r_S = 62600$ км), внутри которой его движение происходит только под действием силы тяжести Луны. Будем также считать орбиту Луны круговой, а траекторию полета — лежащей в ее плоскости.

Масса Земли	$m_E = 5.974 \times 10^{24}$ кг
Масса Луны	$m_M = 7.348 \times 10^{22}$ кг
Радиус орбиты Луны	$d = 384400$ км
Гравитационная постоянная	$G = 8.649 \times 10^{-13}$ км ³ кг ⁻¹ ч ⁻²
Радиус Земли	$R_E = 6378$ км
Радиус Луны	$R_M = 1738$ км
Орбитальная скорость Луны	$V_M = 3644$ км/ч

Космический аппарат находится на круговой орбите радиуса $R_{EO} = 6563$ км вокруг Земли. Через некоторое время третья ступень ракеты-носителя сообщает касательный импульс **в направлении, совпадающем с вращением Луны вокруг Земли**, достаточный для того, чтобы аппарат подошел к границе сферы действия Луны с геоцентрической скоростью $V_{in} = 2636$ км/ч, находясь при этом на расстоянии $d_S = 349700$ км от Земли.

- Изобразите схематически всю траекторию полета в инерциальной геоцентрической системе отсчета.
- Найдите расстояние наибольшего сближения с Луной.
- Какой дополнительный к траектории импульс ΔV (в км/ч) должен сообщить аппарату его маршевый двигатель после выхода из сферы действия Луны, чтобы аппарат попал в необходимый коридор входа в атмосферу Земли $5.5^\circ - 7.5^\circ$ на высоте 100 км от ее поверхности? Коридор входа — угол между вектором скорости и нормалью к радиус-вектору.
- Вычислите длительность полета.

Приложение: Связь между положением тела на орбите и временем
Эллиптическая орбита

$$\begin{aligned}\tan(\theta/2) &= \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \tan(E/2) \\ E - e \sin(E) &= M \\ M &= \left(\frac{GM}{a^3}\right)^{1/2} \tau\end{aligned}$$

θ — истинная аномалия, E — эксцентриситическая аномалия, M — средняя аномалия, e — эксцентриситет орбиты, a — большая полуось, τ — время после прохождения перицентра.

Гиперболическая орбита

$$\tan(\theta/2) = \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{1/2} \tanh(\mathsf{H}/2)$$
$$e \sinh(\mathsf{H}) - \mathsf{H} = \left[\frac{GM(e-1)^3}{r_p^3}\right]^{1/2} \tau$$

H — гиперболическая аномалия, r_p — расстояние в перигалактике.

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 2.9979 \times 10^8 \text{ м/с}$
Гравитационная постоянная	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$
Постоянная Больцмана	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Постоянная Вина	$b = 2.898 \times 10^6 \text{ нм}\cdot\text{К}$
Постоянная Планка	$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$

Астрономические данные

Угол наклона эклиптики к небесному экватору	$\varepsilon = 23^\circ 26'$
Астрономическая единица	$1 \text{ а. е.} = 1.496 \times 10^{11} \text{ м}$
Тропический год	$T_t = 365.2422 \text{ солнечных суток}$
Календарный год	$T_c = 365.2425 \text{ солнечных суток}$
Звездный год	$T_s = 365.256 \text{ солнечных суток}$
Радиус Солнца	$R_\odot = 6.96 \times 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца	$\mathcal{M}_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ кг}$
Постоянная Хаббла (WMAP, 2010)	$H_0 = 71.0 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$
Абсолютная звездная величина Солнца	$M_\odot = 4.8$
Скорость Солнца относительно апекса	$V_\odot = 16.5 \text{ км/с}$