Решения заданий теоретического тура заключительного этапа XVIII Республиканской олимпиады по астрономии

20 марта 2012 года

КОРОТКИЕ ЗАДАЧИ

1.

Найдем радиус орбиты геостационарного спутника:

$$R^3 = \frac{T^2 GM}{4\pi^2} = \frac{86400^3 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2} = 7,52953 \cdot 10^{22} \left(м^3\right);$$

$$R = 4,22269 \cdot 10^7\, м.$$

Рассмотрев прямоугольный треугольник, катеты которого $R_Z + H$ и R, а высота, опущенная на гипотенузу R_Z, где R_Z - радиус Земли, H - высота антенны, получим:

$$\left(\frac{R_Z}{R_Z + H}\right)^2 + \left(\frac{R_Z}{R}\right)^2 = 1.$$

Отсюда:

$$H = R_Z\left(\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - R_Z^2}} - 1\right) = 6,37 \times 10^6\left(\sqrt{\frac{\left(4,22269 \times 10^7\right)^2}{\left(4,22269 \times 10^7\right)^2 - \left(6,371 \times 10^6\right)^2}}\right) = 73740 \left(м\right).$$

Ответ: $H = 73740\ м$

2.

Использование одного спутника позволяет определить расстояние до него, поэтому это сфера, второй спутник – вторая сфера, пересечение – дуга окружности, третий спутник – еще одна сфера – две точки пересечения с ней, четвертый спутник – выбор из этих двух точек одной. Итого: четыре спутника.

Ответ: четыре

3.

Данная точка соответствует нулевому суточному движения Марса в системе отсчета, связанной с Землей, что определяется равенством проекций орбитальных скоростей Земли и Марса на картинную плоскость: $v_M \cdot \cos\beta = v_Z \cdot \sin\gamma$.

Учитывая величину большой полуоси орбиты Марса в астрономических единицах, с учетом известного выражения для круговых скоростей, запишем: $v_Z = \sqrt{1,52}\, v_M$.

Теорема синусов для треугольника Солнце-Марс-Земля, дает: $\frac{\sin\beta}{1} = \frac{\sin\gamma}{1,52}$

Отсюда:

$$\cos\beta=\sqrt{1,52}\sin\gamma$$
$$1,52\sin\beta=\sin\gamma$$
$$\cos\beta=\sqrt{1,52^3}\sin\beta\Rightarrow tg\,\beta=\frac{1}{\sqrt{1,52^3}}=0,5336231\Rightarrow\beta=28,08541°$$

Угол γ тупой (точка стояния между квадратурой и противостоянием), поэтому:
$\gamma=90°+\arcsin(1,52\sin\beta)=135,69212°$.
Разность гелиоцентрических долгот Земли и Марса:
$\alpha=180°-\beta-\gamma=16,22247°$.
Ответ: $\alpha=16,22247°$

4.

Это точка летнего солнцестояния, которая лежит на эклиптике, то есть, ее эклиптическая широта $\beta=0$.

Полуоси аберрационного эллипса: $a=20,5'', b=20,5''\cdot\sin\beta=0$ - вырожденный в отрезок эллипс.

Ответ: $a=20,5'', b=0$

5.

Данная звезда на небесной сфере находится в точке апекса Солнца, следовательно, относительно своих соседей она покоится.

Ответ: $v=0$

6.

Минимальное полезное увеличение:
$$\Gamma=\frac{120\,мм}{d\,[мм]}\Rightarrow\Gamma(5\,мм)=24,\ \ \Gamma(6\,мм)=20,\ \ \Gamma(7\,мм)=17,\ \ \Gamma(8\,мм)=15.$$

7.

Светимость определяется формулой: $L=4\pi R^2\sigma T^4$.
Закон Вина: $T=\dfrac{b}{\lambda_{MAX}}$.
Отсюда: $\dfrac{L_2}{L_1}=\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^4=\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2\left(\dfrac{\lambda_{MAX\,1}}{\lambda_{MAX\,2}}\right)^4$.
Из условия следует:
а) Вторая звезда «краснее» первой:
$\lambda_{MAX\,2}=1,2\,\lambda_{MAX\,1}$, $L_2=20\,L_1$
Следовательно: $\dfrac{R_2}{R_1}=\left(\dfrac{L_2}{L_1}\right)^{0,5}\left(\dfrac{\lambda_{MAX\,2}}{\lambda_{MAX\,1}}\right)^2=20^{0,5}\cdot1,2^2=6,4$.
б) Первая звезда «краснее» второй:
$\lambda_{MAX\,1}=1,2\,\lambda_{MAX\,2}$, $L_2=20\,L_1$
Следовательно: $\dfrac{R_2}{R_1}=\left(\dfrac{L_2}{L_1}\right)^{0,5}\left(\dfrac{\lambda_{MAX\,2}}{\lambda_{MAX\,1}}\right)^2=20^{0,5}\cdot1,2^{-2}=3,1$.

Ответ: а) $\dfrac{R_2}{R_1}=6,4$, б) $\dfrac{R_2}{R_1}=3,1$

8.

Находим абсолютную звездную величину Сириуса:

$$M = m + 5 - 5\lg r_0 = -1,45 + 5 - 5\lg\left(\frac{8,60}{3,26}\right) = 1,44 \ .$$

Видимая звездная величина Солнца на расстоянии $20\ пк$:

$$m_C = M_C - 5 + 5\lg 20 = 4,8 - 5 + 5\lg 20 = 6,305 \ .$$

Расстояние, на котором видимая звездная величина Сириуса равна m_C :

$$r = 10^{-\frac{M - m_C - 5}{5}} = 93,8\left(пк\right)$$

Ответ: $r = 93,8\,пк$

9.

Значение критической плотности определяет соотношение: $Hr = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$,

где $M = \dfrac{4}{3}\pi\rho_{KP} r^3$.

Отсюда: $\rho_{кр} = \dfrac{3\text{H}^2}{8\pi\text{G}} = \dfrac{3}{8\pi\cdot 6,67\cdot 10^{-11}}\left(\dfrac{71}{1,496\cdot 10^8\cdot 206265\cdot 10^6}\right)^2 = 9,5\cdot 10^{-27}\left(\dfrac{кг}{м^3}\right)$

Ответ: $\rho_{кр} = 9,5\cdot 10^{-27}\,\dfrac{кг}{м^3}$

10.

Вычислим сначала Хаббловский возраст Вселенной:

$$t_H = \frac{1.496\times 10^8\cdot 206265\cdot 10^6}{71.0}\cdot\frac{1}{365.2425\times 24\times 3600}\ \ лет = 1.37\times 10^{10}\,лет.$$

Эволюция массы черной дыры:

$$M = M_0 + \dot{M}\,\Delta t \ \Rightarrow\ 2M_0 = M_0 + \dot{M}\,\Delta t \ \Rightarrow\ \Delta t = \frac{M_0}{\dot{M}} = \frac{1\times 10^6}{0.5}\,лет = 2\times 10^6\,лет \simeq 1\times 10^{-4}\,t_H .$$

Ответ: $1\times 10^{-4}\,t_H$

11.

В момент летнего солнцестояния круги склонения и эклиптической широты Солнца совпадают. Поэтому прямые восхождения звезды и Солнца отличаются на 12^h .

Высота звезды в верхней кульминации: $h_B = 90°$, а в нижней $h_H = 0$. С учетом нахождения наблюдателя в южном полушарии широта места наблюдения: $\phi = -\dfrac{h_B + h_H}{2} = \dfrac{-90°}{2} = -45°$. Склонение звезды в зените равно географической высоте места наблюдения: $\delta = -45°$. Прямое восхождение звезды: $\alpha = \alpha_C + 12^h = 18^h$

Эклиптическая долгота звезды: $\lambda = 270°$

Эклиптическая широта звезды: $\beta = \varepsilon + \delta = -21°34'$

Ответ: эклиптическая долгота: $\lambda = 270°$, эклиптическая широта: $\beta = \varepsilon + \delta = -21°34'$

ЗВЕЗДА ГЛАВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Зависимость радиус-светимость для звезды и Солнца:
$L = C_R R^{5.2} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Rightarrow R = 1{,}984\, R_{C.}$.

Светимость звезды: $L = \left(\frac{R}{R_C}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_C}\right)^4 L_C = 1{,}984^2 \cdot \left(\frac{10000}{5780}\right)^4 L_C = 35{,}27\, L_C$.

Зависимость масса-светимость для звезды и Солнца:
$L = C_m m^{3.9} \Rightarrow m = 2.49\, m_C$. .

Абсолютная звездная величина звезды:
$M = 2{,}5 \lg L - M_S = 2{,}5 \cdot \lg 35{,}27 - 4{,}8 = 0{,}93$.

Полное время нахождения на главной последовательности:
$t = \frac{10 \cdot 10^9}{m^{2.9}} = \frac{10^{10}}{2{,}49^{2.9}} = 7 \cdot 10^8 (\text{лет})$.

Ответ: $R = 2{,}0\, R_C$; $m = 2{,}5\, m_C$; $M = 0{,}93$; $t = 7 \cdot 10^8 (\text{лет})$

ПОЛЕТ К ЛУНЕ

(Подробное решение в приложении)

(a) Траектория имеет вид «восьмерки», опоясывающей Землю и Луну.

(b) 1165 км относительно поверхности Луны.

(c) При заданных параметрах старта, аппарат, облетев Луну, не попадет в атмосферу Земли. Для попадания в коридор входа необходим импульс $\Delta V = (-1866 \ldots -1860)$ *км/ч.*

(d) 167 часов.