

# МЕГААТОМЫ

## Теоретический тур

### Решение и схема оценивания

26 марта 2013 года

(a) При движении электрона по круговой орбите вокруг протона

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \text{или} \quad \frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

тогда полная механическая энергия электрона

$$W = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

совпадает по модулю со средней кинетической энергией. Учитывая, что начальная энергия электрона равна нулю, излученная энергия  $W_r = -W$ . Тогда его скорость  $v = \sqrt{2W_r/m_e}$ , а радиус орбиты

$$r = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{W_r}.$$

Согласно допущению Бора,

$$W_r = nh\nu = nh \frac{1}{2}(v/2\pi r).$$

Подставляя выражения для  $v$  и  $r$ , получаем

$$W_r r = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} e^2 = nh \frac{v}{4\pi} \quad \text{или} \quad W_r = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

и

$$\Delta W_r = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right).$$

(b) Диаметр атома водорода в возбужденном состоянии

$$d = 2r = \frac{2\varepsilon_0 h^2 n_1^2}{\pi m_e e^2} = 2a_0 n_1^2,$$

где  $a_0$  – радиус орбиты основного состояния. Поскольку для серии Бальмера  $n_2 = 2$ , то для наблюдения 33 линий необходимо, чтобы начальное состояние соответствовало  $n_1 = 35$ . Концентрацию  $n_0$  водорода можно получить из оценки

$$n_0 \leqslant \frac{1}{d^3} \quad \text{или} \quad n_0 \leqslant \frac{1}{8a_0^3 n_1^6}.$$

Приняв  $a_0 = 5.293 \cdot 10^{-11}$  м, получаем  $n_0 \leqslant 4.59 \cdot 10^{20}$  м<sup>-3</sup>.

## Заключительный этап XIX Республиканской олимпиады по астрономии

Плотность водорода получим умножив его концентрацию на массу протона (пренебрегая массой электрона)  $\rho = m_p n_0 = 7.67 \cdot 10^{-7}$  кг/м<sup>3</sup>.

Считая давление водорода прямо пропорциональным концентрации, получаем  $p_2 = p_1(n_1/n_2)^6 = 1.4 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.

(с) При столкновении двух атомов их кинетическая энергия может перейти в энергию электрона в возбужденном состоянии

$$2E_k = 3kT = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \approx \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2}.$$

Давление водорода при данной температуре  $p = n_0 k T = 333.1$  Па = 2.5 мм рт. ст.

(д) Длина волны спектральной линии

$$\lambda = \frac{8 \varepsilon_0^2 h^3 c}{m_e e^4} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)^{-1}.$$

Тогда длины волн переходов  $\lambda_{110 \rightarrow 109} = 5.984$  см,  $\lambda_{157 \rightarrow 156} = 17.47$  см и  $\lambda_{159 \rightarrow 158} = 18.15$  см.

Для концентраций получаем значения  $n_{110 \rightarrow 109} \leq 4.759 \cdot 10^{17}$  м<sup>-3</sup>,  $n_{157 \rightarrow 156} \leq 5.630 \cdot 10^{17}$  м<sup>-3</sup> и  $n_{159 \rightarrow 158} \leq 5.218 \cdot 10^{17}$  м<sup>-3</sup>.

(е) Лабораторная длина волны, соответствующая данному переходу (формула из (d)):  $\lambda_0 = 121.5$  нм. Тогда лучевая скорость найдем по релятивистскому эффекту Доплера:

$$V_r = 0.9630c = 2.887 \times 10^8$$
 м/с.

Задача оценивается 25 баллами