

МЕГААТОМЫ

Теоретический тур

Решение и схема оценивания

26 марта 2013 года

(а) При движении электрона по круговой орбите вокруг протона

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \text{или} \quad \frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

тогда полная механическая энергия электрона

$$W = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

совпадает по модулю со средней кинетической энергией. Учитывая, что начальная энергия электрона равна нулю, излученная энергия $W_r = -W$. Тогда его скорость $v = \sqrt{2W_r/m_e}$, а радиус орбиты

$$r = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{W_r}.$$

Согласно допущению Бора,

$$W_r = nh\nu = nh \frac{1}{2} (v/2\pi r).$$

Подставляя выражения для v и r , получаем

$$W_r r = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} e^2 = nh \frac{v}{4\pi} \quad \text{или} \quad W_r = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

и

$$\Delta W_r = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right).$$

(b) Диаметр атома водорода в возбужденном состоянии

$$d = 2r = \frac{2\epsilon_0 h^2 n_1^2}{\pi m_e e^2} = 2a_0 n_1^2,$$

где a_0 – радиус орбиты основного состояния. Поскольку для серии Бальмера $n_2 = 2$, то для наблюдения 33 линий необходимо, чтобы начальное состояние соответствовало $n_1 = 35$. Концентрацию n_0 водорода можно получить из оценки

$$n_0 \leq \frac{1}{d^3} \quad \text{или} \quad n_0 \leq \frac{1}{8a_0^3 n_1^6}.$$

Приняв $a_0 = 5.293 \cdot 10^{-11}$ м, получаем $n_0 \leq 4.59 \cdot 10^{20}$ м⁻³.

Заключительный этап XIX Республиканской олимпиады по астрономии

Плотность водорода получим умножив его концентрацию на массу протона (пренебрегая массой электрона) $\rho = m_p n_0 = 7.67 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^3$.

Считая давление водорода прямо пропорциональным концентрации, получаем $p_2 = p_1 (n_1/n_2)^6 = 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$

(с) При столкновении двух атомов их кинетическая энергия может перейти в энергию электрона в возбужденном состоянии

$$2E_k = 3kT = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \approx \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2}.$$

Давление водорода при данной температуре $p = n_0 kT = 333.1 \text{ Па} = 2.5 \text{ мм рт. ст.}$

(d) Длина волны спектральной линии

$$\lambda = \frac{8 \varepsilon_0^2 h^3 c}{m_e e^4} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)^{-1}.$$

Тогда длины волн переходов $\lambda_{110 \rightarrow 109} = 5.984 \text{ см}$, $\lambda_{157 \rightarrow 156} = 17.47 \text{ см}$ и $\lambda_{159 \rightarrow 158} = 18.15 \text{ см}$.

Для концентраций получаем значения $n_{110 \rightarrow 109} \leq 4.759 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$, $n_{157 \rightarrow 156} \leq 5.630 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$ и $n_{159 \rightarrow 158} \leq 5.218 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$.

(е) Лабораторная длина волны, соответствующая данному переходу (формула из (d)): $\lambda_0 = 121.5 \text{ нм}$. Тогда лучевая скорость найдем по релятивистскому эффекту Доплера:

$$V_r = 0.9630c = 2.887 \times 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача оценивается 25 баллами