

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXIII РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ

Решения заданий практического тура

НАБЛЮДЕНИЯ

Задание 1. Неизвестное созвездие.

- а) Созвездие Андромеды (другие ответы не принимаются, т.к. другие созвездия не находятся в центре изображения). Отсутствуют звёзды α And, β And, γ And (см. рис.). В созвездии не находятся ни эклиптика, ни ее полюса, ни галактический экватор, ни полюса галактики.
- б) Созвездие Андромеды граничит с созвездиями: Кассиопея, Ящерица, Пегас, Рыбы, Треугольник, Персей. Границы созвездия обозначены на изображении.
- в) Все собственные имена *видимых на изображении звёзд (сами звёзды на изображении не обозначены)*:

Andromeda		Aries		Auriga		Cassiopeia	
α	Alpheratz	α	Hamal	α	Capella	α	Schedar
β	Mirach	β	Sheratan	ε	Almaaz, Maaz, Al Maz, Al Anz	β	Caph
γ	Almaak	γ	Mesarthim	ζ	Sadatoni, Saclateni, Haedus I, Hoedus I	γ	Tsih, Navi
δ	Sadiradra	δ	Botein, Al Butain	η	Haedus II, Hoedus II	δ	Ruchbah, Ksora
ξ	Adhil	ε	Al Butain	ι	Al Kab, Kabdhilinan, Hassaleh	ε	Segin
υ	Adhab, Azab	ζ	Al Butain	λ	Al Hurr, Al Hiba	ζ	Foo Loo
φ	Keun Nan Mun	ρ	Al Butain	μ	Al Hiba	η	Achird
51	Nembus, Anfal, El Enfal	τ	Al Butain	ρ	Al Hiba	θ	Marfak
		41	Bharani			μ	Marfak

Cepheus		Cygnus		Pegasus	
δ	Alrediph	α	Deneb	α	Markab
ε	Phicares	γ	Sadr	β	Scheat
ζ	Tsao Fu	ε	Gienah	γ	Algenib
μ	Garnet Star, Erakis	π^1	Azelfafage	ε	Enif
		π^2	Pennae Caudalis, Sama al Azrak	ζ	Homan
Pisces		Triangulum		η	Matar
η	Alperg, Kullat-Nunu	α	Motallah	θ	Biham
τ	Anuntium	β	Deltotum	κ	Jih
				λ	Sadalpheretz
				μ	Sadalbari
				ξ	Homan
				π	Woo
				τ	Salm, Kerb, El Khareb
Perseus		Taurus		Cetus	
α	Mirphak, Alcheb, Gorgonea Prima	λ	Sadr al Tauri, Elthor	λ	Menkar
β	Algol, Gorgona, Demon Star	ξ	Usharakon		
γ	Al Fakhir, Alpecher, Seid	σ	Atrisagne		
δ	Adid Borealis, Basel	5	Esat		
ε	Adid Australis	16	Celaeno		
ζ	Atik, Menkhib	17	Electra		
η	Miram	19	Taygeta		
κ	Misam	20	Maya		
ξ	Menkib	21	Sterope I		
σ	Atik	22	Sterope II		
π	Gorgonea Secunda	23	Merope		
ρ	Gorgonea Tertia	27	Atlas		
φ	Seif, Alseiph	28	Pleyone		
ω	Gorgonea Quarta				

- d) i) Самые яркие: α And, β And ($m = 2.05$). ii) На изображении звёзды обозначены как 01 (всего одна звезда: α Aur), 12 (всего две звезды: α Cyg, α Per), 23.
- e) Некоторые переменные звёзды обозначены квадратами, двойные – кружками.
- f) Все 10 объектов (M 29, M 31, M 32, M 33, M 34, M 39, M 45, M 52, M 103, M 110) обозначены на рисунке.
- g) $\Delta\delta \approx \mu_\delta \Delta t$, $\Delta\alpha = \frac{\mu_\alpha \Delta t}{\cos\delta}$ (местоположение см. рис.)
- 1: $\alpha_0 \approx 0^h40^m$, $\delta_0 \approx 31^\circ00'$, $\Delta\alpha \approx 7.4^m$, $\Delta\delta \approx -1^\circ10'$ $\Rightarrow \alpha \approx 0^h48^m$, $\delta \approx 29^\circ50'$
- 2: $\alpha_0 \approx 0^h40^m$, $\delta_0 \approx 54^\circ00'$, $\Delta\alpha \approx 5.0^m$, $\Delta\delta \approx -0^\circ26'$ $\Rightarrow \alpha \approx 0^h45^m$, $\delta \approx 53^\circ30'$

АНАЛИЗ ДАННЫХ

Задание 2. Очень рассеянное скопление.

В качестве критерия, по которому мы разделим звезды на относящиеся к некоторому скоплению, используем их собственное движение, а также отношение $\frac{\mu_\delta}{\mu_\alpha \cos\delta}$. Результаты расчетов приведены в двух последних столбцах, а звезды, относящиеся к данному рассеянному скоплению, выделены жирным шрифтом

№	α	δ	μ_α (mas/yr)	μ_δ (mas/yr)	μ (mas/yr)	$\mu_\delta/(\mu_\alpha \cos\delta)$
1	3 ^ч 48 ^м 29 ^с	24°09'13"	0,02120	-0,04311	0,04725	-2,229
2	3 ^ч 46 ^м 33 ^с	24°07'19"	0,02544	-0,03449	0,04158	-1,485
3	3 ^ч 50 ^м 09 ^с	24°06'05"	0,01946	-0,04470	0,04810	-2,516
4	3 ^ч 48 ^м 59 ^с	24°36'31"	0,02616	-0,03550	0,04273	-1,493
5	3 ^ч 45 ^м 23 ^с	23°57'56"	0,03706	-0,01707	0,03792	-0,504
6	3 ^ч 45 ^м 52 ^с	24°09'46"	0,02361	-0,04492	0,04982	-2,085
7	3 ^ч 47 ^м 44 ^с	24°22'14"	0,03411	-0,02640	0,04077	-0,850
8	3 ^ч 46 ^м 49 ^с	24°25'01"	0,02315	-0,04503	0,04972	-2,136
9	3 ^ч 47 ^м 19 ^с	23°59'50"	0,02316	-0,04267	0,04763	-2,017
10	3 ^ч 48 ^м 08 ^с	24°32'54"	0,03402	-0,01665	0,03514	-0,538
11	3 ^ч 46 ^м 12 ^с	24°31'00"	0,02126	-0,04163	0,04590	-2,152
12	3 ^ч 48 ^м 15 ^с	24°09'11"	0,03075	-0,02337	0,03652	-0,833
13	3 ^ч 50 ^м 11 ^с	24°11'05"	0,02050	-0,04674	0,05034	-2,499
14	3 ^ч 45 ^м 48 ^с	24°20'20"	0,02274	-0,04400	0,04863	-2,124
15	3 ^ч 43 ^м 56 ^с	24°07'52"	0,03305	-0,02695	0,04045	-0,893
16	3 ^ч 48 ^м 45 ^с	24°26'55"	0,03473	-0,02252	0,03881	-0,712
17	3 ^ч 52 ^м 05 ^с	24°07'59"	0,02530	-0,03129	0,03889	-1,355
18	3 ^ч 46 ^м 54 ^с	24°36'13"	0,02137	-0,04536	0,04935	-2,335
19	3 ^ч 47 ^м 03 ^с	24°34'37"	0,02180	-0,04438	0,04861	-2,239
20	3 ^ч 44 ^м 58 ^с	24°34'19"	0,02778	-0,03175	0,04058	-1,257

Задание 3. Девятая планета.

- (a) $P^2 = a^3$. Если резонанс равен r_i , то период 9 планеты из резонанса с i -той планетой равен $P = a_i^{3/2} r_i$. Большая полуось равна $a = r_i^{2/3} a_i$. Вычислим период и большую полуось орбиты как среднее значение.

Объект	a_i [а. е.]	r_i	T [годы]	a [а. е.]
Sedna	506.84	3:2	17116	664.15
2010 GB174	350.7	5:2	16420	646.0
2004 VN112	319.6	3:1	17140	664.8
2012 VP113	265.8	4:1	17330	669.8
2000 CR105	221.59	5:1	16493	647.93
2013 GP136	151.8	9:1	16830	656.8

Средние значения: $P = 16890$ лет, $a = 658$ а. е. $= P^{2/3}$.

- (b) На рисунке измерим, например, большую полуось орбиты и апофелийное расстояние: $e = \frac{a_a}{a} - 1 \approx \frac{11}{6.8} - 1 = 0.62$

- (c) $a_p = a(1 - e) = 251.6$ а. е.

$$a_a = a(1 + e) = 1065 \text{ а. е.}$$

- (d) Поток солнечного излучения на расстоянии d :

$$F = \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T_{\odot,eff}^4}{4\pi d^2} = \frac{R_\odot^2}{d^2} \sigma T_{\odot,eff}^4$$

Полученная планетой энергия:

$$E = \frac{R_\odot^2}{d^2} \sigma T_{\odot,eff}^4 \pi R^2 (1 - A)$$

Поток излучения на поверхности планеты:

$$f = \sigma T^4 = \frac{R_\odot^2 \sigma T_{\odot,eff}^4 \pi R^2}{4\pi R^2 d^2} = \frac{R_\odot^2 \sigma T_{\odot,eff}^4 (1 - A)}{4\pi d^2}$$

Температура поверхности планеты:

$$T = T_{\odot,eff} \sqrt{\frac{R_\odot}{2d}} \sqrt[4]{(1 - A)}$$

Температура не зависит от радиуса планеты, но зависит от её альбедо.

Температура в перигелии и афелии:

$$T = T_{\odot,eff} \sqrt{\frac{R_\odot}{2a(1 \pm e)}} \sqrt[4]{(1 - A)}$$

Для планеты типа Земли альбедо равно земному (0.306), а для ледяного гиганта альбедо равно альбедо Нептуна (0.29).

Температура в перигелии и афелии для планеты-Земли: 1.60 К и 0.78 К

Температура в перигелии и афелии для планеты-гиганта: 1.61 К и 0.78 К

- (e) Измерим отношения данного расстояния и большой полуоси на рисунке:

$$\frac{d}{a} = \frac{10.9}{6.8} \Rightarrow d \approx 1055 \text{ а. е.}$$

Поток излучения планеты, видимый с Земли (расстояние от Солнца до планеты практически равно расстоянию от планеты до Земли):

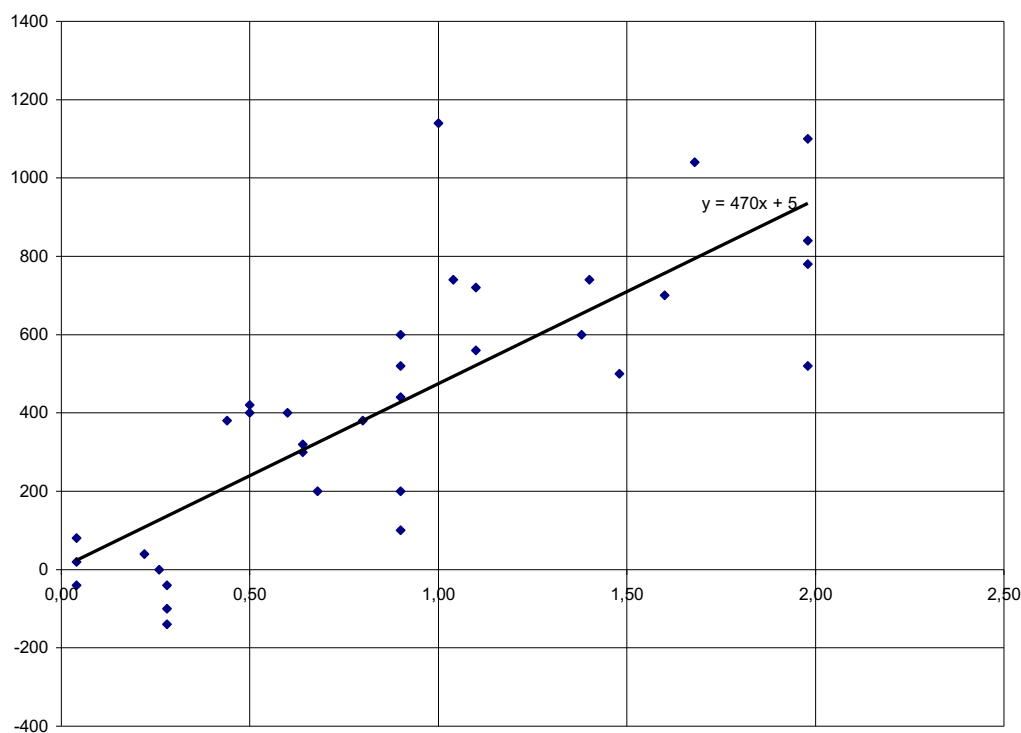
$$E = \frac{L_\odot}{4\pi d^2} \frac{\pi R^2 A}{4\pi d^2} = \frac{L_\odot A R^2}{16\pi d^4}$$

Поток солнечного излучения на Земле:

$$f = \frac{L_\odot}{4\pi a_e^2}$$

Звёздная величина для двух случаев: $m = V_\odot - 2.5 \log\left(\frac{E}{f}\right) = V_\odot - 2.5 \log\left(\frac{AR^2 a_e^2}{4d^4}\right) = 26.6$ и 23.7

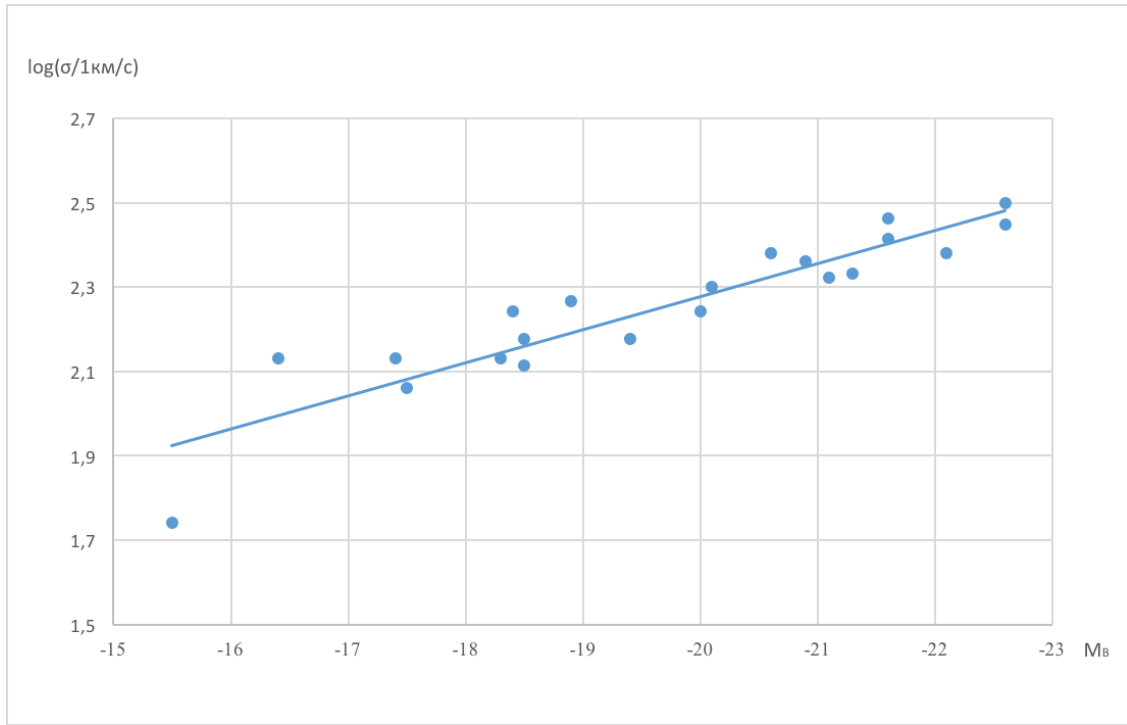
Задание 4. Оригинальная постоянная Хаббла.



Задание 5. Соотношение Фабер – Джексона.

(а) Далее $\langle x \rangle$ обозначает среднюю величину, а \hat{x} – расчётную величину x . Также используем очевидные обозначения: $M_B \equiv x$, $\log_{10} \left(\frac{\sigma}{1 \frac{\text{км}}{\text{с}}} \right) \equiv y$, $n = 21$ – количество пар значений. Кроме того, в окончательных ответах оставлены только две значимые цифры (т.к. значения дисперсий скоростей оканчиваются на 0 и 5 и указаны лишь приблизительно).

- (i) $\sigma = \langle v^2 \rangle^{1/2}$ – корень из среднеквадратичной скорости звёзд.
- (ii) График с линией зависимости:



(iii) Очевидно, между данными есть корреляция.

Коэффициент корреляции рассчитывается по формулам:

$$r = \frac{\sum(x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum(x_i - \langle x \rangle)^2 \sum(y_i - \langle y \rangle)^2}} = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\sqrt{(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)(\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2)}}$$

Коэффициент корреляции может принимать значения в интервале $[-1; 1]$. Чем ближе модуль коэффициента к 1, тем сильнее зависимость между исследуемыми величинами. В данном случае $r = -0.92$, что подтверждает корреляцию.

(iv) С помощью линейной регрессии: $\beta = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = -0.0784 \approx -7.8 \times 10^{-2}$

$\alpha = \langle y \rangle - \hat{\beta} \langle x \rangle = 0.7093 \approx 0.71$. Таким образом,

$$\log_{10} \left(\frac{\sigma}{1 \text{ км/с}} \right) = -7.8 \times 10^{-2} M_B + 0.71$$

$$\text{Ошибка коэффициента } \beta: s_\beta = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2}{(n-2) \sum(x_i - \langle x \rangle)^2}} = 0.0077$$

$$\text{Ошибка коэффициента } \alpha: s_\alpha = s_\beta \langle x^2 \rangle = 0.15$$

(v) $\log_{10} \left(\frac{\sigma}{1 \text{ км/с}} \right) = -7.8 \times 10^{-2} M_B + 0.71$

$$M_B = \frac{\log_{10} \left(\frac{\sigma}{1 \text{ км/с}} \right) - 0.71}{-7.8 \times 10^{-2}} \approx -12.7 \log_{10} \left(\frac{\sigma}{1 \frac{\text{км}}{\text{с}}} \right) + 9.0$$

$$\Rightarrow M_B \sim -12.7 \log_{10} \left(\frac{\sigma}{1 \frac{\text{км}}{\text{с}}} \right)$$

С другой стороны,

$$M_B - M_{B,\odot} = 2.5 \log \frac{L_{B,\odot}}{L_B}$$

$$L_B = L_{B,\odot} 10^{0.4(M_{B,\odot} - M_B)}$$

$$\Rightarrow L_B \sim 10^{-0.4 M_B} \sim 10^{-0.4 \left(-12.7 \log_{10} \left(\frac{\sigma}{1 \frac{\text{км}}{\text{с}}} \right) \right)} \sim 10^{5.1 \log_{10} \left(\frac{\sigma}{1 \frac{\text{км}}{\text{с}}} \right)}$$

$\Rightarrow L_B \sim \sigma^{5.1}$ – соотношение Фабера – Джексона для светимости в лучах В

(b) Рассмотрим галактику вириальной массой M и радиусом R с дисперсией скоростей в одном направлении σ , состоящую из N частиц массой m .

$$(i) \quad -3m\sigma^2 \approx -\frac{3GM^2}{5NR}$$
$$\Rightarrow M = \frac{5R\sigma^2}{G}$$

$$(ii) \quad \frac{M}{L} = \text{const}$$
$$\Rightarrow M \sim L$$
$$L \sim \frac{5R\sigma^2}{G}$$

(iii) Если поток излучения с единицы площади галактики равен B , то:

$$L = 4\pi R^2 B$$

$$R^2 \sim L$$

Кроме того, из (ii) следует:

$$L^2 \sim R^2 \sigma^4$$

Заменяя R^2 на L , получим:

$L \sim R^2 \sigma^4$ – теоретическое соотношение Фабера – Джексона. В теоретической зависимости показатель степени равен не 5.1, а 4, на что влияют приближения, использованные в выводе соотношения.