

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXIII РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ

Теоретический тур



28 марта 2017 года

Задача 1. Сумерки.

В течение некоторого времени после захода и перед восходом Солнца поверхность Земли освещается солнечным светом, рассеянным атмосферой. Этот период времени называется сумерками.

- (a) Очертите границы областей поверхности Земли, в которых иногда случаются «белые» ночи, а «черные» ночи происходят круглый год. Ответ подтвердите расчетами.
- (b) Для места проведения нашей олимпиады ($\varphi = 53^\circ 40'$, $\lambda = 23^\circ 49'$) рассчитайте:
 - (i) Максимальную, в течение года, продолжительность вечерних гражданских, навигационных и астрономических сумерек. Гражданские, навигационные и астрономические сумерки – время, когда высота Солнца равна от 0° до -6° , от -6° до -12° и от -12° до -18° под горизонтом соответственно.
 - (ii) Максимальное (в течение года) время, на которое рефракция увеличивает продолжительность светового дня.

Задача 2. Первый спутник.

В этом году мы будем отмечать 60-летний юбилей запуска первого искусственного спутника Земли. Вот что нам известно о нем: масса 83,6 кг, максимальный диаметр 0,58 м, большая полуось орбиты 6955,2 км, эксцентриситет 0,05201, наклонение $65,1^\circ$, период обращения 96,7 мин, высота спутника над поверхностью Земли в апоцентре – 939 км, в перигентре – 215 км.

- (a) Спутник запустили 4 октября 1957 года в $19^h 28^m 34^s$ по времени UTC. Сколько полных суток прошло с этого исторического момента до момента решения Вами этой задачи?
- (b) Знание элементов орбиты спутника позволяет «измерить» как радиус Земли, так и ее массу (в приближении сферически симметричного тела). Рассчитайте и Вы эти две величины независимо от их значений в таблице справочных данных.
- (c) В каких областях Земли (укажите географические широту и долготу) можно было наблюдать первый спутник в зените?
- (d) Какова видимая звездная величина первого спутника при наиболее благоприятных условиях его наблюдения и возможно ли его наблюдение невооруженным глазом?
Информация: очень многие очевидцы этого события утверждают, что они видели полет первого спутника, и яркость его соответствовала достаточно ярким звездам.
- (e) Чему была равна максимальная скорость первого спутника относительно поверхности Земли, когда он пересекал экватор?

Задача 3. Главная последовательность.

Рассмотрим две звезды главной последовательности, полное время нахождения которых на ней отличается от полного времени нахождения на ней Солнца на 20% в противоположные стороны.

- (a) Чему равно полное время нахождения каждой из них на главной последовательности?
- (b) Рассчитайте массу и радиус каждой из этих звезд.
- (c) Чему равны температуры фотосфер этих звезд?
- (d) На сколько процентов отличаются температуры в центрах этих звезд от температуры в центре Солнца?

Задача 4. Аккреционный диск.

В этой задаче мы рассмотрим упрощенную модель аккреционного диска вокруг звезды. Она важна для понимания процесса формирования звёзд, планетных систем, обмена звёздным материалом в кратных системах и т. д.

Представим систему из двух звёзд, в которой идёт обмен веществом темпом \dot{M} (т.е. размерность $[\dot{M}] = \text{кг с}^{-1}$). Орбитальное движение двух звёзд приводит к тому, что вещество, перетекающее от одной звезды массой m к другой звезде массой M (размер букв, обозначающих звёзды, не имеет отношения к массе самих звёзд), не падает прямо на нее, а переходит на орбиту вокруг этой звезды, образуя аккреционный диск. В результате трения между собой частицы теряют кинетическую энергию, поэтому радиус орбит отдельных частиц постепенно, с достаточно медленным темпом, уменьшается, вещество приближается к звезде и впоследствии поглощается. С другой стороны, полная энергия частиц сообразно теореме вириала переходит в их термальную энергию – диск нагревается и излучает в соответствующем волновом диапазоне.

- (a) Чему равна излученная полная энергия частиц, проходящих за время t через участок диска, ограниченный радиусами $r, r + \Delta r$ ($\Delta r \ll r$)? При решении учитывайте теорему вириала.
- (b) Чему равна светимость, соответствующая этому участку диска?
- (c) Чему равна температура этого участка диска? Подсказка: диск излучает с двух сторон.
- (d) Звезда, поглощающая материю, имеет радиус R . Выразите температуру участка диска, полученную в c), как $T(r) = C \left(\frac{r}{R}\right)^n$, где n – показатель степенной зависимости температуры участка диска от радиуса участка, а C – некоторая постоянная величина, не зависящая от r . Чему равны n, C ?
- (e) Величина C может быть интерпретирована как характерная температура диска. Чему равна C для белого карлика массой $0.85M_{\odot}$, радиусом $0.0095R_{\odot}$ и потоком массы $1.3 \times 10^{-9}M_{\odot}/\text{год}$? Какова характерная длина волны излучения диска и в каком участке волнового спектра она находится?
- (f) Исходя из размерностей величин, найдите аккреционную светимость звезды и диска с точностью до некоторой безразмерной константы K . В выражении для светимости должны присутствовать лишь следующие величины: K, G, M, \dot{M}, R .
- (g) Константа K равна единице. Найдите аккреционную светимость диска и звезды для параметров, данных в e). Половина этой светимости излучается непосредственно самим диском, а половина энергии высвобождается у поверхности звезды при взаимодействии быстро вращающейся падающей материи и медленно вращающейся звезды.

Задача 5. Поверхностная яркость и разбегание галактик.

- (а) Выведите формулу для поверхностной яркости объекта (количества звездных величин на единицу площади) в зависимости от его звёздной величины и угловой площади на небесной сфере.
- (б) Покажите, что величина поверхностной яркости объекта не зависит от расстояния до него.
- (с) Найдите поверхностную яркость Солнца в звездных величинах на квадратную угловую секунду.
- (d) Найдите поверхностную яркость галактики М51, видимая звёздная величина которой $V = 8.10$, а угловой размер – $11'12'' \times 6'54''$. Если считать, что звёзды в этой галактике солнцеподобные, то какую часть видимой площади галактики они занимают?
- (е) Галактики М51 («Водоворот») и М63 («Подсолнух») являются доминирующими в небольшой, слабо связанной группе галактик М51, удалённой от Млечного Пути на расстояние порядка 10 Мпк.
Расстояние до М51 – 23 млн св. лет, а радиальная скорость этой галактики равна 463 км/с. Для М63 эти параметры составляют 37 млн св. лет и 484 км/с соответственно. Чему равны хаббловские и радиальные пекулярные скорости галактик?

Задача 6. Рождение Земли.

На протяжении тысячелетий человека интересовало то, как образовалась планета Земля, а уже в XVIII столетии это исследовали научными методами П. Лаплас и И. Кант. Гипотеза Канта-Лапласа гласит: Солнечная система образовалась из протопланетной туманности, которая когда-то вращалась вокруг молодого Солнца. Это прямо следует из того, что орбиты планет в Солнечной системе лежат примерно в одной плоскости и близки к круговым, а планеты вращаются по ним в одном направлении, совпадающем с направлением вращения Солнца. Похожие туманности сегодня мы можем наблюдать вокруг маломассивных звёзд типа Т Тельца и более массивных звёзд Хербига (Ае/Ве).

Протопланетный диск состоит примерно из 98-99% газа и 1-2% пыли, из которой и образуются планеты. Однозначного ответа на вопрос, как из 10^{40} пылинок диаметром 1 мкм возникла Земля, пока ещё нет.

- (а) Считается, что образование планет начинается примерно тогда, когда масса диска составляет примерно 10% массы звезды. Темп аккреции составляет при этом $\dot{M} \approx 10^{-8} M_{\odot}$ в год. Какова аккреционная температура протопланетного диска Солнечной системы на расстоянии 1 а. е. от Солнца? Считайте массу Солнца равной его сегодняшней массе. Какова температура абсолютно поглощающих излучение пылинок на расстоянии 1 а. е. от Солнца? Светимость Солнца считайте равной его светимости в настоящее время. За счёт какого процесса в основном поддерживается температура аккреционного диска?
- (б) Популярной моделью протопланетной туманности является так называемая «Minimum mass solar nebula». Она имеет следующие теоретические значения поверхностной плотности компонент на расстоянии r от Солнца:

Газ	Σ_{gas}	=	$17 \times 10^3 \left(\frac{r}{1 \text{ а. е.}} \right)^{-3/2} \text{ кг м}^{-2}$
Пыль	Σ_{dust}	=	$70 \left(\frac{r}{1 \text{ а. е.}} \right)^{-3/2} \text{ кг м}^{-2}$
Лёд	Σ_{ice}	=	$220 \left(\frac{r}{1 \text{ а. е.}} \right)^{-3/2} \text{ кг м}^{-2} (r > 2.7 \text{ а. е.})$

Считайте, что все пылинки уже сконцентрировались в планетезимали радиусом 1 км и плотностью 1 кг м^{-3} .

- i) Найдите массу одной планетезимали m_{pts} . Сколько таких планетезималей потребуется, чтобы образовалась Земля?
- ii) Найдите примерные значения расстояний r_1, r_2 ($r_1 < 1 \text{ а.е.} < r_2$), чтобы в области туманности, ограниченной этими радиусами, находились планетезимали, общая масса которых равнялась бы массе Земли.
- iii) Найдите среднюю поверхностную концентрацию планетезималей σ_{pts} в этой области, а также поверхностную концентрацию планетезималей для $r = 1 \text{ а.е.}$
- iv) Для образования планет решающими являются возмущения орбит отдельных планетезималей: без этого частицы просто вращались бы по круговым орбитам, не взаимодействуя между собой. Таким образом, для малых значений эксцентриситета и наклона орбиты скорость отдельной частицы можно записать как $\vec{v} = \vec{v}_k + \Delta\vec{v}$, где \vec{v}_k – кеплеровская скорость вращения, а $\Delta\vec{v}$ – небольшое возмущение (либо дисперсия скоростей). Найдите “динамическую температуру” планетезималей, аналогичную температуре газа, частицы которого движутся со среднеквадратичной скоростью $\Delta v = 1 \text{ км/с.}$
- v) Эта «температура» (не являющаяся температурой в буквальном смысле!) приводит к тому, что планетезимали находятся не в одной плоскости, а распределены в области высотой $2H$, где $H = r \frac{\Delta v}{v_k}$. Найдите H , а также среднюю пространственную концентрацию планетезималей n_{pts} в области между радиусами r_1, r_2 и концентрацию для $r = 1 \text{ а.е.}$
- vi) Предположим, что одна достаточно крупная планетезималь плотностью ρ_E и массой m_0 ($m_{pts} \ll m_0 \ll M_E$) начинает случайно сталкиваться с другими планетезималями, увеличиваясь в результате их «налипания». Выразите количество столкновений в секунду как функцию от $n_{pts}, \Delta v$ и радиуса планетезимали R_0 .
- vii) Найдите формулу для прироста массы планетезимали за секунду $\frac{\Delta m}{\Delta t}$.
- viii) Найдите прирост радиуса планетезимали в год $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ и вычислите его, используя значения, данные выше. Сколько времени потребовалось бы для образования Земли согласно данным расчётам?
Влияют ли на это время величины $\Delta v, m_{pts}$ и за счёт чего образование планет проходит намного быстрее?

Справочные данные

Масса Солнца	M_{\odot}	1.9891×10^{30} кг
Радиус Солнца	R_{\odot}	6.95508×10^8 м
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot, eff}$	5777 К
Температура центра Солнца	T_{\odot}	1.5×10^7 К
Видимая звёздная величина Солнца в V-лучах	V_{\odot}	-26.75
Время нахождения Солнца на главной последовательности	t_{\odot}	10^{10} лет
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	5.670400 Вт м ⁻² К ⁻⁴
Постоянная Больцмана	k	1.38065×10^{-23} Дж К ⁻¹
Гравитационная постоянная	G	6.67×10^{-11} м ³ с ⁻² кг ⁻¹
Скорость света в вакууме	c	2.99792458×10^8 м с ⁻¹
Постоянная Вина	b	2.8977729×10^{-3} м К
Постоянная Хаббла	H	67.8 км с ⁻¹ Мпк ⁻¹
Парсек	1 пк	3.0857×10^{16} м
Астрономическая единица	1 а.е.	1.496×10^{11} м
Юлианский год	1 год	365.25 сут
Большая полуось орбиты Земли	a_e	1.0000 а.е.
Сидерические сутки	P_e	$23^h 56^m 04.0905309^c$
Масса Земли	M_E	5.9736×10^{24} кг
Средняя плотность Земли	ρ_E	5515 кг м ⁻³
Сферическое альbedo Земли	A_E	0.306
Средний радиус Земли	R_e	6.371×10^6 м
Экваториальный радиус Земли	R_{eq}	6.378×10^6 м
Сферическое альbedo Нептуна	A_N	0.29
Средний радиус Нептуна	R_N	$3.88 R_e$
Величина рефракции у горизонта	ξ	35'

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \Delta x} \approx \frac{\Delta x}{x^2} \text{ для } \Delta x \ll x$$

Эмпирические зависимости для звёзд:

$t \sim M^{-3}$ — время нахождения звезды на главной последовательности

$L \sim R^{5.2}, L \sim M^{3.9}$ — светимость звезды

$T \sim R^{1/3}$ — температура в центре звезды