ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
XXIII РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ПО АСТРОНОМИИ

Решения заданий теоретического тура

Задача 1. Сумерки.

(a) Белые ночи – такой период суток, когда вечерние гражданские сумерки непрерывно переходят в утренние гражданские сумерки (описание сумерек см. (b)).
Черные ночи – период суток между окончанием вечерних астрономических суток и началом утренних астрономических сумерек. Небо при этом (если не считать остаточных излучений) черное.

Географическую широту границ белых ночей рассчитываем по формуле:
$\varphi = \pm(90° - 29°26') = \pm 60°34'$. То есть: $\underline{|\varphi| > 60°34'}$.

Географическую широту границ ежесуточных черных ночей рассчитываем по формуле:
$\varphi = \pm(90° - 41°26') = 48°34'$. То есть: $\underline{-48°34' < \varphi < 48°34'}$.

(b) Гражданские сумерки (достаточно светло, чтобы не использовать искусственное освещение) начинаются в момент времени, когда зенитное расстояние центра Солнца $z = 90°51'$ и заканчиваются при $z = 96°$, затем начинаются навигационные (видны яркие звезды и четкая линия горизонта) сумерки, которые заканчиваются при $z = 102°$, далее, до $z = 108°$, следуют астрономические (постепенно «появляются» все звезды). Цвет безоблачного неба при этом – все оттенки синего – от голубого до темно-темно синего.
(i) Для определения продолжительности гражданских, навигационных и астрономических сумерек используем разность величин часовых углов центра Солнца, определяющих их границы, которые определяем по формуле: $\cos t = \dfrac{\cos z - \sin\delta \cdot \sin\varphi}{\cos\delta \cdot \cos\varphi}$.
При этом гражданские и навигационные сумерки в Гродно в течение года самые длинные во время летнего солнцестояния $\delta = 23°26'$, а астрономические – на границе наступления черных ночей $\delta = 90° - 53°40' - 18° = 18°20'$. В итоге получим:

максимальная продолжительность гражданских сумерек: $\underline{\Delta t = 53^m 21^s}$;

максимальная продолжительность навигационных сумерек: $\underline{\Delta t = 1^h 39^m 47^s}$;

максимальная продолжительность астрономических сумерек: $\underline{\Delta t = 2^h 19^m 34^s}$.

(ii) Максимальное в течение года время, на которое рефракция увеличивает продолжительность светового дня определяем как удвоенную разность значений часовых углов центра Солнца, соответствующих его зенитным расстояниям $z_1 = 90°51'$ и $z_1 = 90°16'$ в день летнего солнцестояния (угловой радиус Солнца $r_\odot = \frac{R_\odot}{a_e} = 16'$ рассчитывается с учетом данных из таблицы констант).

В результате получим: $\underline{\Delta t = 9^m 55^s}$.

Задача 2. Первый спутник.

(a) Начало полета - 4 октября 1957 в UTC = 19ч28м34с.
До дня проведения теоретического тура нашей олимпиады 28 марта 2017 года прошло 21724 полных суток.

(b) В сферическом приближении радиус Земли определяем по формуле:
$$R = \frac{2 \cdot 6955 \text{ км} - 205 \text{ км} - 939 \text{ км}}{2} = 6371 \text{ км}$$
Для определения массы Земли используем формулу: $M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 5.92{\times}10^{24}$ кг

(c) Если мы представим сферический треугольник, образованный небесным экватором и траекторией спутника, то предельные значения географической широты точек поверхности Земли, в которых спутник был в зените, соответствуют наклонению его орбиты, то есть $\underline{-65{,}1^\circ < \varphi < 65{,}1^\circ}$.

(d) Положим самые идеальные условия: Земля не закрывает Солнце, альбедо поверхности спутника равно 1, атмосфера ничего не поглощает, засветки нет (используем значение видимой звездной величины Солнца $m_1 = -26{,}75$).

Тогда из соотношения $\frac{F_1}{F_2} = 10^{0,4\cdot(m_2 - m_1)} = \frac{150000000^2}{215^2}$, получим: $m_2 = 2.57$.

На самом деле видимая звездная величина спутника существенно больше.

Что же видели «очевидцы»? Историки космонавтики считают - вторую ступень.

(e) Максимальная скорость спутника в перигее его орбиты.

Скорость относительно центра Земли: $v_q = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 7.93$ км/с.

Скорость спутника относительно экватора Земли определяем по формулам:

Величина $v'_q = \sqrt{v_q^2 + v_{eq}^2 - 2v_q v_{eq}\cos i} = 7.75$ км/с.

Здесь $v_{eq} = \frac{40074 \text{ км}}{86164 \text{ с}} = 0.475$ км/с - линейная скорость вращения точек экватора.

Направление скорости: $\underline{\alpha = \arcsin\left(\frac{v_q}{v'_q}\sin i\right) = 68{,}2^\circ}$.

Задача 3. Главная последовательность.

(a) Время нахождения звезды
Природа отвела Солнцу $t_\odot = 10^{10}$лет

Поэтому $t_1 = 1.2{\times}10^{10}$лет, $t_2 = 0.8{\times}10^{10}$лет

(b) Полное время нахождения звезды на главной последовательности оценивается по формуле: $t = \frac{10^{10}}{M^3}$, поэтому: $M_1 = (\frac{10^{10}}{1{,}2\cdot 10^{10}})^{\frac{1}{3}} = 0{,}94 M_S$, $M_2 = (\frac{10^{10}}{0{,}8\cdot 10^{10}})^{\frac{1}{3}} = 1{,}08 M_S$.

Для звезд главной последовательности известны эмпирические соотношения (все отнесено к Солнцу): $\left.\begin{matrix} L = R^{5,2} \\ L = M^{3,9} \end{matrix}\right\} \Rightarrow R = M^{\frac{3}{4}}$. Получим: $\underline{R_1 = 0{,}96 R_S}$, $\underline{R_1 = 1{,}06 R_S}$.

(c) Определим их светимости: $L_1 = 0{,}79 L_s$, $L_2 = 1{,}34 L_s$
Считая излучение звезд чернотельным, получим
$T_{P1}^4 = L_1 / R_1^2 \Rightarrow T_{P1} = 0{,}96 T_S$, $T_{P1}^4 = L_1 / R_1^2 \Rightarrow T_{P2} = 1{,}05 T_S$.

(d) Температура в центре звезды главной последовательности определяет формула:
$T = 1{,}50 \cdot 10^7 R^{\frac{1}{3}}$ К.

Температуры в центрах звезд отличаются от температуры в центре Солнца на
$\frac{T_1 - T_S}{T_S} = -1{,}51\%$, $\frac{T_2 - T_S}{T_S} = 0{,}34\%$.

Задача 4. Аккреционный диск.

(a) Потенциальная энергия: $\Delta U = -\frac{GM\Delta m}{r} - \left(-\frac{GM\Delta m}{r+\Delta r}\right) = \frac{-\frac{GM\Delta m}{r} - \left(-\frac{GM\Delta m}{r+\Delta r}\right)}{\Delta r} \Delta r = \frac{GM\Delta m}{r^2} \Delta r$
Полная энергия равна $\Delta E = \frac{\Delta U}{2} = \frac{GM\Delta m}{2r^2} \Delta r$
(b) $L = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{GM\Delta m}{2r^2 \Delta t} \Delta r = \frac{GM}{2r^2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta r = \frac{GM\dot{M}}{2r^2} \Delta r$
(c) Поток излучения:
$$F = \sigma T^4 = \frac{L}{A} = \left(\frac{GM\dot{M}}{2r^2} \Delta r\right) \div (2 \cdot 2\pi r \Delta r) = \frac{GM\dot{M}}{8\pi r^3}$$
$$T = \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3}\right)^{1/4}$$
(d) $T(r) = \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3}\right)^{1/4} \left(\frac{r}{R}\right)^{-3/4} \quad \Longrightarrow \quad C = \left(\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3}\right)^{1/4}, \quad n = -3/4$
(e) $C = T = 69 \times 10^3 K$, $\lambda = \frac{b}{T} = 42$ нм – ультрафиолет
(f) Используя формулу, аналогичную $L(r)$ относительно степеней размерностей, получим $L = K \frac{GM\dot{M}}{R}$
(g) $L = \frac{GM\dot{M}}{R} = 1.4 \times 10^{27}$ Вт
Светимость непосредственно самого диска равна 7.0×10^{26} Вт

Задача 5. Поверхностная яркость и разбегание галактик.

(a) Сравним звёздные величины галактики и квадратной угловой секунды (либо другой единицы площади) галактики, сравнивая их потоки излучения F и f:
$\mu - m = 2.5 \log\left(\frac{F}{f}\right) = 2.5 \log A \implies \mu = m + 2.5 \log A$ (A – площадь в квадратных угловых секундах либо других единицах)

(b) $\mu = m + 2.5 \log A$ (*линейная площадь галактики равна πab, где a и b – полуоси эллипса галактики*)
$$\mu = (M - 5 + 5\log D) + 2.5 \log\left(\frac{\pi ab}{D^2}\right) = M - 5 + 5\log D + 2.5\log(\pi ab) - 5\log D =$$
$= M - 5 + 2.5\log(ab)$ – нет зависимости от расстояния D

(c) $\mu_\odot = V_\odot + 2.5 \log\left(\pi \frac{R_\odot^2}{a_e^2} \cdot \left(\frac{360 \cdot 3600}{2\pi}\right)^2\right) = -10.60$

(d) $\mu = V + 2.5\log\frac{\pi\alpha\beta}{4} = 12.6$ (α и β – *оси эллипса галактики)*

Сравним потоки излучения с квадратной угловой секунды Солнца и галактики: $\mu_{\odot} - \mu = 2.5\log(\frac{f}{f_{\odot}}) = 2.5\log(\frac{\varepsilon f_{\odot}}{f_{\odot}}) = 2.5\log\varepsilon$

$\varepsilon = 10^{0.4(\mu_{\odot}-\mu)} = 5.5\times10^{-10}$

(e) Хаббловские скорости галактик $v_H = Hd$ равны 478 км/с $\approx$ 480 км/с для M 51 и 769 км/с $\approx$ 770 км/с для M 63.

Следовательно, пекулярные скорости $v_p = v - v_H$ равны 15 км/с и -290 км/с.

Задача 6. Рождение Земли.

(a) Аккреционная температура: $T = (\frac{GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3})^{1/4} = 65\ K$ (см. 4 (c))

Температура пылинок, имеющих радиус орбиты r и альбедо A (в данном случае $A = 0$):

$$T = T_{\odot,eff}\sqrt{\frac{R_{\odot}}{2r}}\sqrt[4]{(1-A)} = 279\ K$$

Таким образом, температура протопланетного диска поддерживается в основном за счёт излучения Солнца.

(b) Некоторые пункты данной задачи можно, но *не обязательно* решить с помощью дифференцирования и интегрирования.

i) Масса одной планетезимали: $m_{pts} = \frac{4}{3}\pi\rho R_{pts}^3 = 4.2\times10^{12}$кг

$N = \frac{M_E}{m_{pts}} \approx 1.4\times10^{12}$ – достаточно большое количество для того, чтобы проводить дальнейшие расчёты с планетезималями как с «пылью».

ii) Будем считать, что необходимая масса заключена в достаточно тонком кольце, так что поверхностная плотность планетезималей в нём примерно постоянна и равна 70 кг м$^{-2}$.

$M_E = \Sigma_{dust}A = \Sigma_{dust}\pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi\Sigma_{dust}((r+\Delta r)^2 - (r-\Delta r)^2) = 4\pi\Sigma_{dust}r\Delta r$

$\Delta r = \dfrac{M_E}{4\pi\Sigma_{dust}r} = 4.5\times10^{10}$м $= 0.30$ а. е.

$r_1 = r - \Delta r = 0.70$ а. е.

$r_2 = r + \Delta r = 1.30$ а. е.

Расчёт с помощью интегрирования:

$M_E = \int_{r_1}^{r_2}\Sigma_{dust}(r)\cdot 2\pi r dr = 2\Sigma_0\pi(1\text{ а. е})^{\frac{3}{2}}\int_{r_1}^{r_2} r^{-\frac{1}{2}}dr = 4\Sigma_0\pi(1\text{ а. е})^{\frac{3}{2}}(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}) =$

$= 4\Sigma_0\pi(1\text{ а. е})^{\frac{3}{2}}(\sqrt{r+\Delta r} - \sqrt{r-\Delta r})$, Σ_0– поверхностная плотность пыли для $r = 1$ а. е.

$$\left(\frac{M_E}{4\Sigma_0\pi(1\text{ а. е})^{\frac{3}{2}}}\right)^2 = (\sqrt{r+\Delta r} - \sqrt{r-\Delta r})^2 = 2(r - \sqrt{r^2 - \Delta r^2})$$

$$r - \left(\frac{M_E}{4\sqrt{2}\Sigma_0\pi(1\text{ а. е})^{\frac{3}{2}}}\right)^2 = \sqrt{r^2 - \Delta r^2}$$

$$\Longrightarrow \Delta r = \left(r^2 - \left[r - \left(\frac{M_E}{4\sqrt{2}\Sigma_0\pi(1\text{ а. е})^{\frac{3}{2}}}\right)^2\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} = 4.5\times10^{10}\text{м} = 0.30\text{ а. е.}$$

$r_1 = r - \Delta r = 0.70$ а. е.
$r_2 = r + \Delta r = 1.30$ а. е.
Благодаря удачному совпадению результат, полученный с помощью интегрирования, и приближенный результат совпадают. Стоит отметить, что реальные поверхностные плотности для r_1, r_2 составляют $1.7\Sigma_0 = 120$ кг м$^{-2}$ и $0.67\Sigma_0 = 47$ кг м$^{-2}$ соответственно.

iii) $\langle\sigma_{pts}\rangle = \frac{N}{S} = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = 3.7\times10^{11}$ а. е.$^{-2} = 1.7\times10^{-11}$м$^{-2}$

Для $r = 1$ а. е.: $\sigma_{pts} = \frac{\Sigma_0}{m_{pts}} = 1.7\times10^{-11}$ м$^{-2}$ ($\langle\sigma_{pts}\rangle$ и σ_{pts} в точности равны)

iv) $T = \frac{m_{pts}\,\Delta v^{\,2}}{3k} = 3.2\times10^{41}$К

v) $v_k = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}} = 29.8$ км/с

$$H = r\frac{\Delta v}{v_k} = 5.0\times10^9 \text{ м} = 0.34 \text{ а. е.}$$

$$\langle n_{pts}\rangle = \frac{\langle\sigma_{pts}\rangle}{2H} = 5.6\times10^{12} \text{ а. е.}^{-3} = 1.7\times10^{-21}\text{м}^{-3}$$

Для $r = 1$ а. е.: $n_{pts} = \frac{\sigma_{pts}}{2H} = 1.7\times10^{-21}$ м$^{-3}$ ($\langle n_{pts}\rangle$ и n_{pts} в точности равны)

vi) Время между столкновениями большой планетезимали с мелкими: $t = \frac{1}{n_{pts}\Delta v \pi R^2}$

Количество ударов в секунду: $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{t} = \pi R^2 n_{pts}\Delta v$

vii) $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} m_{pts} = \pi R^2 n_{pts}\Delta v m_{pts}$

viii) $\Delta m = 4\pi R^2 \rho_E \Delta R$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4\pi R^2 \rho_E \frac{\Delta R}{\Delta t} = \pi R^2 n_{pts}\Delta v m_{pts}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{n_{pts}\Delta v m_{pts}}{4\rho_E} = 1.0 \text{ см в год независимо от радиуса большой планетезимали}$$

С таким темпом понадобится 600 млн лет, чтобы “построить” Землю – время, не согласующееся с данными: на самом деле процесс длится примерно в 10 раз меньше. Можно ли увеличить темп прироста, увеличивая Δv? К сожалению, нет: хотя в формуле $\frac{n_{pts}\Delta v m_{pts}}{4\rho_E}$ увеличится Δv, уменьшится $n_{pts} = \frac{\sigma_{pts}}{2H} = \frac{\sigma_{pts} v_k}{r\Delta v}$. Таким образом, $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ не зависит от Δv.

Аналогично, $\frac{n_{pts}\Delta v m_{pts}}{4\rho_E}$ не зависит от m_{pts}, т.к. $n_{pts} = \frac{\sigma_{pts}}{2H} = \frac{\Sigma_0}{2Hm_{pts}}$.

Альтернативная формула для прироста: $\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\Sigma_0\omega_k}{8\rho_E}$, где ω_k – кеплеровская круговая скорость.

Единственная очевидная возможность ускорить темп – увеличить Σ_0. Это означает, что после образования всех планет Солнечной системы остаётся много “лишнего” материала: при темпе с массой материала, равной массе всех планет, процесс будет слишком долгим. Где же тогда весь “лишний” материал?

На самом деле темп прироста намного выше благодаря “гравитационному фокусированию”: планетезималь притягивает другие частицы. Вместо геометрического сечения $\sigma_g = 4\pi R^2$в формулах используется гравитационное сечение $\sigma_G = \sigma_g(1 + \frac{v_{esc}^2}{\Delta v^2})$, где $v_{esc}^2 = \frac{2Gm}{R}$. Тогда $\frac{\Delta R(t)}{\Delta t} = \frac{\Sigma_0\omega_k}{8\rho_E}\left(1 + \frac{2Gm(t)}{R(t)\Delta v^2}\right)$ – темп прироста меняется со временем, и задача становится слишком сложной для IV этапа республиканской олимпиады по астрономии.