ВАРИТАНТ 1

ЗАДАНИЕ 1
ЗВЕЗДНОЕ НЕБО

Уважаемые участники олимпиады! Вам представлена карта участка звездного неба, на которой цифрами обозначены некоторые яркие звезды.

А). Составте таблицу (по аналогии с примером ниже), указав в ней для каждой из 10-и отмеченных на карте звезд: принадлежность к созвездию на русском языке, обозначение по каталогу Байера-Флемстида и собственное название.

Примечания:

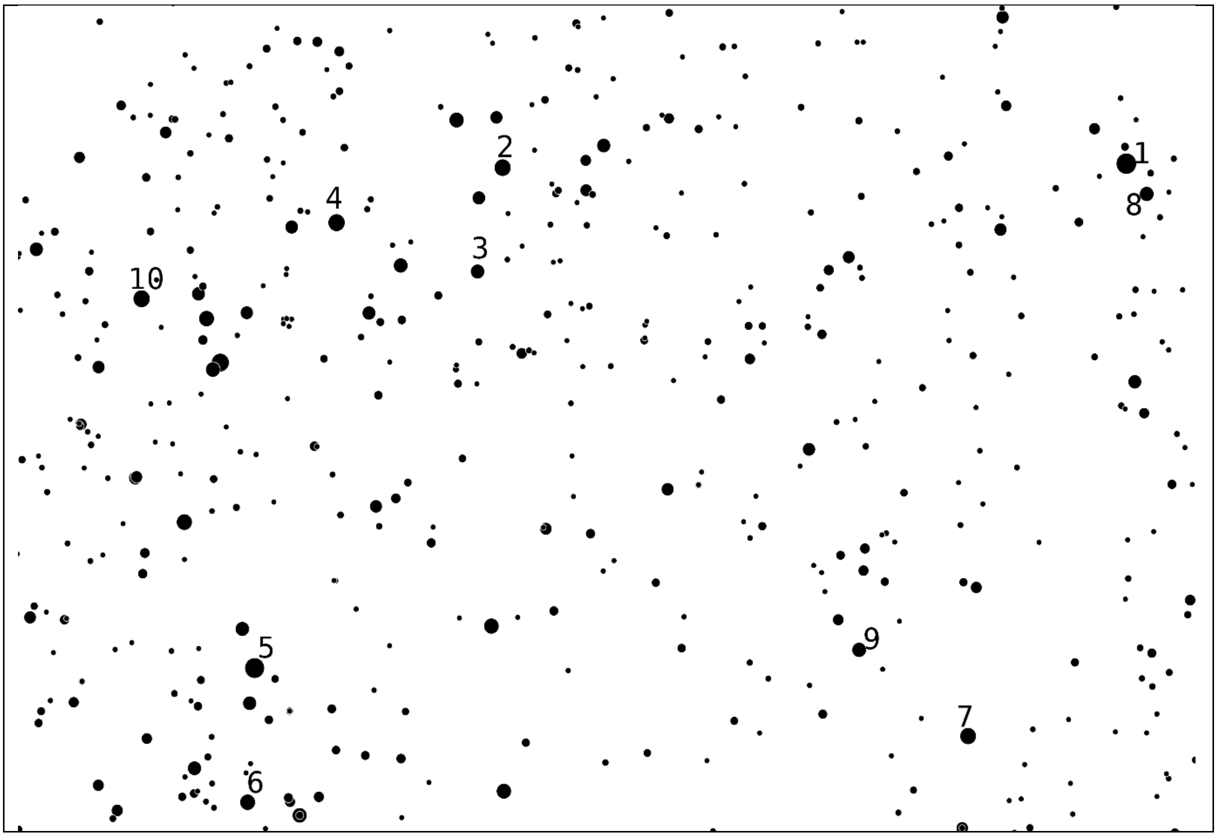
а). Границы карты не параллельны координатным осям прямого восхождения и склонения.

б). Таблицу нарисовать в листе ответов.

Пример ответов:

№	Принадлежность к созвездию на русском языке	Обозначение по каталогу Байера-Флемстида	Собственное название
1	α Льва	α Leo	Регул
2	α Девы	α Vir	Спика
…	…	…	…

Карта участка звездного неба



Б). Молодой астроном ростом ~1,7 метра, прогуливался и любовался звездным небом. На горизонте сияли огни большого города. Чтобы исключить влияние света города он решил проводить наблюдения из цилиндрической башни с внутренним диаметром 2 метра и высотой ~4,5 метра. Стоя по центру башни, он обнаружил, что звезда Вега находится прямо в зените. Перечислите какие еще яркие звезды он сможет увидеть стоя по центру башни в это время. Склонение Веги принять равным ~39°.

Примечание: указать принадлежность к созвездию на русском языке, обозначение по каталогу Байера-Флемстида и собственное название на любом языке.

В). На какой географической широте находилась башня?

Решение (20 баллов)

А). (10 баллов)

№	Принадлежность к созвездию на русском языке	Обозначение по каталогу Байера-Флемстида	Собственное название
1.	α Орла	α Aql	Альтаир
2.	σ Стрельца	σ Sgr	Нунки
3.	λ Стрельца	λ Sgr	Каус Бореалис

4.	ε Стрельца	ε Sgr	Каус Аустралис
5.	α Скорпиона	α Sco	Антарес
6.	δ Скорпиона	δ Sco	Джубба (Компонента А)
7.	α Змееносца	α Oph	Рас Альхаге
8.	γ Орла	γ Aql	Таразед
9.	β Змееносца	β Oph	Цебальрай
10.	θ Скорпиона	θ Sco	Саргас

Б). (8 баллов)

№	**Принадлежность к созвездию на русском языке**	**Обозначение по каталогу Байера-Флемстида**	**Собственное название**	**Собственное название на русском языке**
1.	β Лиры	β Lyr	Sheliak	Шелиак
2.	γ Лиры	γ Lyr	Sulafat	Сулафат
3.	μ Геркулеса	μ Her	86 Herculis	86 Геркулеса
4.	β Лебедя	β Cyg	Albireo	Альбирео
5.	δ Лебедя	δ Cyg	-	-
6.	γ Дракона	γ Dra	Etamin	Этамин
7.	ξ Дракона	ξ Dra	Grumium	Грумиум
8.	β Дракона	β Dra	Rastaban	Растабан

В). (2 балла)

Географическая широта равна склонению светила, находящемуся в зените. Башня находилась на широте 39°.

ЗАДАНИЕ 2
ДВОЙНАЯ ЗВЕЗДА

Две звезды радиусами R_1 =6000 км и R_2=3000 км с массами $2M_С$ и $0{,}5M_С$ вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Расстояние от поверхности одной звезды до другой составляет a=30000 км. Найдите:

А). Наибольшее значение угла наклона плоскости орбиты этой двойной звездной системы к лучу зрения, при котором еще не будут наблюдаться затмения.

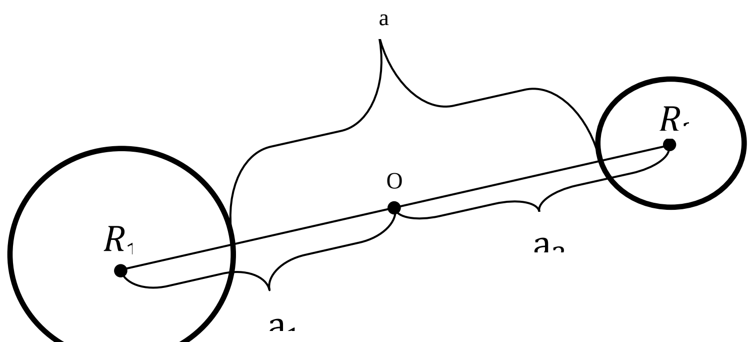
Б). Большие полуоси их орбит.

В). Линейные скорости их движения.

Г). Периоды обращения звезд.

Гравитационная постоянная равна G = 6,67·10⁻¹¹ Н·м²·кг⁻². $M_С$=2·10^{30} кг.

Решение (20 баллов)



А).

$$\sin i = \frac{R_1+R_2}{a+R_1+R_2},$$ откуда i~13°20′. **(4 балла)**

Б). Звезды, взаимодействуют между собой с силой $F = \frac{GM_1M_2}{(a+R_1+R_2)^2}$.

Тогда $F = \frac{GM_1M_2}{(a+R_1+R_2)^2} = M_1\frac{v_1^2}{a_1}$; $\frac{GM_2M_2}{(a+R_1+R_2)^2} = M_2\frac{v_2^2}{a_2}$, (1)

где a_1 и a_2- расстояние от центров масс звезд до центра массы системы.

$\frac{v_1^2}{a_1} = \omega^2 a_1$, $\frac{v_2^2}{a_2} = \omega^2 a_2$. Из этого следует:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a + R_1 + R_2 \\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1} \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$a_1 = \left(\frac{M_2(a+R_1+R_2)}{M_1+M_2}\right)$ =7800 км; $a_2 = \frac{M_1(a+R_1+R_2)}{M_1+M_2}$=31200 км. **(6 баллов)**

В).

Линейные скорости их движения будут определять из уравнений (1)

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_2 a_1}{(a_1+a_2)^2}} = 585 \text{ км/с}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM_1 a_2}{(a_1+a_2)^2}} = 2340 \text{ км/с}.$$ **(6 баллов)**

Г).

Периоды обращения звезд относительно центра масс будут одинаковы. Так как их орбиты круговые, то $T = \frac{2\pi a_1}{v_1} = 84$ *с*. **(4 балла)**

Ответы: 13º20′; 7800 км; 31200 км; 585 км/с; 2340 км/с; 84 с.

ЗАДАНИЕ 3
РАДИОСПЕКТР ПУЛЬСАРА

Радиоизлучение пульсаров отличается чрезвычайно высокой степенью периодичности всплесков (импульсов). Однако форма временного профиля индивидуальных импульсов у подавляющего большинства пульсаров изменяется чрезвычайно сильно, поэтому для получения представления о форме профиля импульса конкретного пульсара выполняется усреднение как минимум 1000 последовательных импульсов и формируется средний профиль. В таблице 1 представлены численные данные для среднего временного профиля импульса радиоизлучения пульсара PSR J1645–0317 на частоте $\nu_0 = 610$ МГц в виде зависимости спектральной плотности потока радиоизлучения S_ν от времени τ, выраженного в единицах периода P следования радиоимпульсов данного пульсара.

Из многочисленных астрономических наблюдений известно, что спектр радиоизлучения пульсаров существенно отличается от планковского спектра и может быть описан степенной зависимостью вида $S_\nu \sim \nu^\alpha$, где α – спектральный индекс. Более того, зарегистрированы спектры ряда пульсаров, которые описываются двумя и даже тремя степенными зависимостями для различных диапазонов частот. В таблице 2 представлены значения спектральной плотности потока радиоизлучения пульсара PSR J1645–0317 на различных частотах.

Таблица 1. Спектральная плотность потока радиоизлучения пульсара PSR J1645–0317 в различные моменты времени

Таблица 2. Спектральная плотность потока радиоизлучения пульсара PSR J1645–0317 на различных частотах

τ	S_ν, мЯн
0,000	10,6
0,002	73,6
0,004	238,4
0,006	1705,0
0,007	4419,7
0,008	8632,6
0,009	12556,2
0,010	13560,1
0,011	10524,8
0,012	6039,3
0,013	2738,7
0,014	1087,8
0,016	205,5
0,018	142,5
0,020	146,9
0,022	91,6

№	ν, ГГц	S_ν, мЯн
1	0,082	491
2	0,09	584
3	0,098	552
4	0,105	582
5	0,111	590
6	0,112	620
7	0,113	633
8	0,114	702
9	0,115	640
10	0,116	700
11	0,117	753
12	0,118	747
13	0,13	729
14	0,26	498
15	0,285	320
16	0,38	251
17	0,4	216
18	0,61	–
19	0,85	12,80
20	1,055	6,22

Примечание: Ян (сокр. от Янский) – единица измерения спектральной плотности потока излучения в радиоастрономии, равная 10^{-26} Вт/(м^2·Гц)

а) Определите полуширину $\Delta\tau$ импульса радиоизлучения (в единицах периода P). Оцените скважность Q импульсного радиосигнала пульсара как отношение периода следования импульсов к полуширине импульса, выраженной в секундах.

б) Найдите суммарную спектральную плотность потока радиоизлучения данного пульсара на частоте ν_0 и дополните таблицу 2.

в) Определите спектральный индекс α, используя данные таблицы 2 (методы линеаризации вам помогут).

г) Оцените частоту ν_m (в МГц) радиоизлучения, соответствующую максимуму радиоспектра пульсара.

Решение (20 баллов)

а) Графическое изображение временного профиля импульса радиоизлучения пульсара представлено на рисунке 1. Полуширина импульса – это ширина импульса на половине его высоты. Полуширина импульса пульсара PSR J1645–0317 составляет $\Delta\tau = 0{,}0044$ долей периода P. Скважность радиосигнала пульсара равна

$$Q = \frac{P}{\Delta t} = \frac{P}{P\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau} = 227{,}27$$ **(4 балла)**

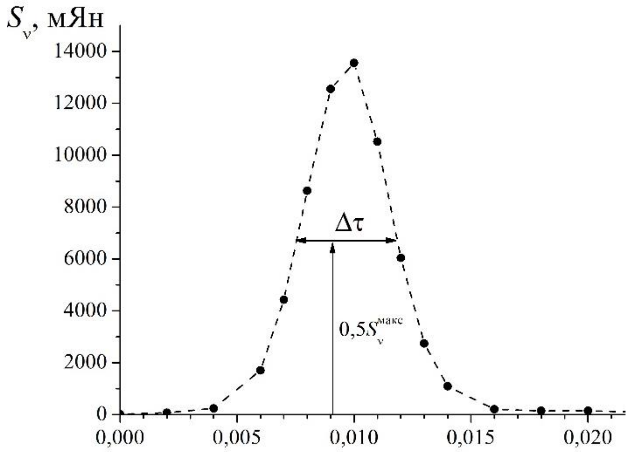


Рисунок 1. Временной профиль импульса радиоизлучения пульсара PSR J1645–0317

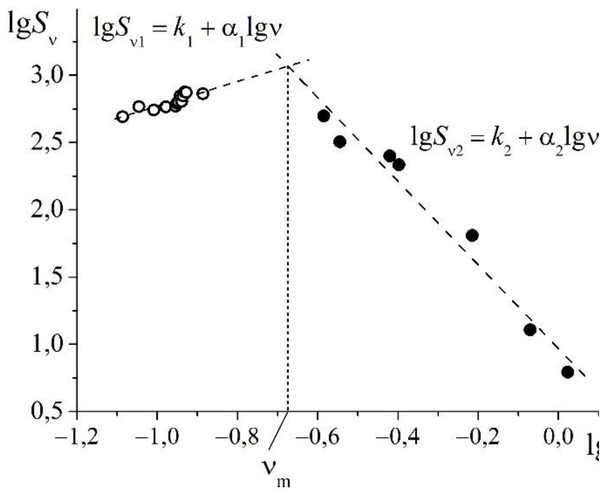


Рисунок 2. Спектр радиоизлучения пульсара PSR J1645–0317

б) Суммарная спектральная плотность потока радиоизлучения пульсара на частоте ν_0 определяется площадью под временным профилем импульса радиоизлучения на данной частоте. Учитывая дискретный характер представленного временного профиля, удобно разбить форму профиля на совокупность трапеций, суммарная площадь которых дает искомую спектральную плотность потока на частоте ν_0, равную 64,377 мЯн. (**4 балла**)

в) Спектр радиоизлучения пульсара в координатах «частота–спектральная плотность потока» состоит из двух участков – низкочастотного и высокочастотного, каждый из которых нужно аппроксимировать степенной зависимостью $S_\nu \sim \nu^\alpha$ и определить два спектральных индекса. Для применения метода наименьших квадратов (МНК) удобно степенную функцию $S_\nu = K\nu^\alpha$ преобразовать в линейную с помощью логарифмирования и получить линейную функцию вида $\lg S_\nu = k + \alpha \lg \nu$. Спектр радиоизлучения пульсара PSR J1645–0317 в координатах $\lg\nu - \lg S_\nu$ представлен на рисунке 2. Тогда спектральный индекс есть угловой коэффициент линейной функции, который согласно МНК определяется с помощью выражения

$$\alpha = \frac{\langle \lg\nu \cdot \lg S_\nu \rangle - \langle \lg\nu \rangle \langle \lg S_\nu \rangle}{\langle \lg^2 \nu \rangle - \langle \lg\nu \rangle^2}.$$

Для низкочастотного участка получаем α_1 = 0,9, для высокочастотного – α_2 = –3,1.

(**6 баллов**)

г) Для оценки положения максимума спектра радиоизлучения на шкале частот необходимо кроме знания спектрального индекса иметь значение коэффициента *k*. Определяется он с помощью МНК согласно выражению

$$k = \langle \lg S_\nu \rangle - \alpha \langle \lg \nu \rangle .$$

В итоге получаем $k_1 = 3{,}678$ и $k_2 = 0{,}968$. Тогда частоту максимума спектра можно получить, найдя точку пересечения линейных функций для двух участков спектра. Поэтому

$$k_1 + \alpha_1 \lg \nu_m = k_2 + \alpha_2 \lg \nu_m ,$$

откуда получим ν_m = 210 МГц. (**6 баллов**)

ЗАДАНИЕ 4
РАЗНООБРАЗИЕ ХАББЛА

В течение длительного времени накапливались результаты определения значения постоянной Хаббла, полученного различными метода. В настоящее время стало очевидным, что имеется два набора значений этой постоянной, которые между собой не согласуются. Первая группа значений получена с помощью калибровочных методов (с использованием стандартных свеч) и демонстрирует «местное» значение постоянной Хаббла, которое относится к современной Вселенной. Другая группа значений получена из наблюдений реликтового излучения и барионных акустических колебаний и даёт представление о значении постоянной Хаббла в ранней (молодой) Вселенной. Такое «напряжение» Хаббла ученым еще предстоит объяснить.

Перед вами таблица, содержащая значения постоянной Хаббла из одной из этих групп.

Год наблюдения	Метод / Стандартная свеча	$H \pm \sigma_H$, км/(Мпк·с)
2018	Цефеиды + сверхновые SNIa	73,2 ± 2,3
2018	Области HII в галактиках	71,0 ± 3,5
2019	TRGB + сверхновые SNIa	71,1 ± 1,9
2019	Цефеиды + сверхновые SNIa	74,0 ± 1,4
2020	Мазеры	73,9 ± 3,0
2020	Зависимость Талли-Фишера	75,1 ± 2,8
2020	Сверхновые SNII	75,8 ± 2,8
2020	TRGB + сверхновые SNIa	72,1 ± 2,0
2020	Цефеиды + сверхновые SNIa	73,2 ± 1,3
2021	Цефеиды + сверхновые SNIa	73,04 ± 1,04

а) Вычислите среднее взвешенное значение постоянной Хаббла, учитывая, что весовой коэффициент каждого значения равен обратной дисперсии.

б) Определите дисперсию среднего взвешенного значения постоянной Хаббла с учетом весовых коэффициентов.

в) Вычислите расстояние r (в пк) до квазара 3C 273 (z = 0,158 ± 6,7·10^{-5}).

г) Вычислите погрешность расстояния до указанного квазара.

Решение (20 баллов)

а) Вес каждого значения постоянной Хаббла равен $\omega_i = 1/\sigma^2_{\mathrm{H}i}$. Среднее взвешенное значение постоянной Хаббла определяется соотношением

$$\langle H\rangle_\omega = \frac{\sum_{i=1}^{10} H_i\omega_i}{\sum_{i=1}^{10}\omega_i},$$

и составляет $\langle H\rangle_\omega = 73{,}17$ км/(Мпк·с). **(4 балла)**

б) Дисперсия среднего взвешенного значения постоянной Хаббла равна

$$\sigma^2_{\langle H\rangle_\omega} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{\sigma^2_{\mathrm{H}i}}} = 0{,}31 \text{ км/(Мпк}\cdot\text{с)}$$ **(6 баллов)**

в) Так как $z \ll 1$, то $\langle r\rangle = \dfrac{c\langle z\rangle}{\langle H\rangle_\omega} = 647{,}8$ Мпк. **(4 балла)**

г) Средние значения и дисперсии расстояния, красного смещения и постоянной Хаббла связаны соотношением

$$\frac{\sigma_r^2}{\langle r\rangle^2} = \frac{\sigma_z^2}{\langle z\rangle^2} + \frac{\sigma^2_{\langle H\rangle_\omega}}{\langle H\rangle^2_\omega},$$

откуда получим среднее квадратичное отклонение расстояния $\sigma_r = 4{,}94$ Мпк, которое и определяет погрешность расстояния до квазара. (**6 баллов**)

ЗАДАНИЕ 5
СТРЕЛЕЦ А

По современным представлениям, в центре нашей Галактики находится сверхмассивная черная дыра Sgr A*. Для определения параметров этой черной дыры астрономы выполнили ряд наблюдений в обсерватории Кека. В таблице представлены данные измерения периодов движения и лучевых скоростей некоторых звезд, движущихся по наиболее близким к центру Галактики орбитам (так называемые S-звезды). Масса сверхмассивной черной дыры во много раз превосходит массу скопления S-звезд, поэтому саму черную дыру можно считать неподвижной, а гравитационным взаимодействием звезд между собой пренебречь.

А). Считая орбиты S-звезд круговыми и пренебрегая релятивистскими поправками, записать формулу, связывающую период T, массу черной дыры M и лучевую скорость звезды v.

Б). На основании формулы, полученной в предыдущем пункте, построить модель линейной регрессии без свободного члена. На основании полученной модели определить массу сверхмассивной черной дыры M (в массах Солнца), а также погрешность ΔM. Гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\text{Н}\bullet\text{м}^2}{\text{кг}^2}$, массу Солнца $M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}$кг.

В). Лучевые скорости были определены на основе красного смещения спектральных линий звезд. Для какой из звезд относительная погрешность лучевой скорости, связанная с пренебрежением релятивистскими поправками в формуле для эффекта Доплера наиболее высока? Оцените ее значение.

Примечания:

1. В случае релятивистского эффекта Доплера красное смещение спектральных линий для удаляющегося со скоростью v источника, определяется по формуле:

$$Z = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} - 1,$$

где Z – красное смещение источника, $c \approx 3 \times 10^8\ \text{м}/\text{с}$ – скорость света в вакууме.

2. При оценке можно воспользоваться приближенным соотношением

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \left(\alpha(\alpha-1)/2\right)x^2,$$

справедливом при всех действительных α и малых x. Величинами порядка x^3 при этом можно пренебрегать.

Звезда	Лучевая скорость, v, 10^6 м/с	Период обращения, T, лет
S2	3,84	16,5
S19	1,32	57,2
S28	1,12	55,4
S38	1,82	19,6
S39	1,28	46,2

S41	1,41	41,3
S62	2,25	9,92
S61	1,52	38,0
S63	1,63	36,7
S64	1,49	32,2

Решение (20 баллов)

А). Из третьего закона Кеплера

$$T = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM}}, \qquad (1)$$

Где R – радиус орбиты. Круговая скорость имеет вид:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \qquad (2)$$

Исключая R из (1) и (2), получим искомую формулу:

$$T = \frac{2\pi GM}{v^3}. \qquad (3)$$

(2 балла)

Б). Введем обозначения: $X = 1/v^3$, $Y = T$, $a = 2\pi GM$. Тогда из (3) получим уравнение линейной регрессии с нулевым свободным членом:

$$Y = aX.$$

Проведем вычисления по методу наименьших квадратов.

$$S_X = \sum_{i=1}^{10} x_i x_i = 1{,}312 \times 10^{-36}\ \text{с}^6/\text{м}^6;$$

$$S_Y = \sum_{i=1}^{10} y_i y_i = 14763\ \text{лет}^2;$$

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 1{,}345 \times 10^{-16}\text{лет}\ \text{с}^3/\text{м}^3.$$

Таким образом $a = S_{XY}/S_X = 1{,}025 \times 10^{20}$ лет $\text{м}^3/\text{с}^3$, $M = 3{,}86 \times 10^6\ M_{\odot}$.

Погрешность найденного значения коэффициента найдем по формуле:

$$\Delta a = \sqrt{\frac{S_Y - \frac{S_{XY}{}^2}{S_X}}{(N-2)S_X}} = 9{,}61 \times 10^{18}\text{лет}\ \text{м}^3/\text{с}^3.$$

Погрешность вычисления массы:

$$\Delta M = \frac{M}{a}\Delta a = 0{,}4 \times 10^6\ M_{\odot}.$$

(14 баллов)

В). В случае релятивистского эффекта Доплера красное смещение удаляющегося источника определяется по формуле:

$$\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} - 1 \approx \left(1 + \frac{v}{2c} - \frac{1}{8}\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v}{2c} + \frac{3}{8}\frac{v^2}{c^2}\right) - 1 \approx \frac{1}{c}\left(v + v\frac{v}{2c}\right).$$

Таким образом, относительная погрешность измерения лучевой скорости есть $v/_{2c}$. Она будет наибольшей для той звезды, у которой лучевая скорость наибольшая. Это звезда S2. Для нее получим:

$$\frac{\Delta v}{v} = 6{,}4 \times 10^{-3}.$$

Верный ответ можно получить и прямым вычислением на основе точной формулы, что является другим способом решения. **(4 балла)**